数学基礎論

増補版

理学博士
竹内外史
静岡大学理学部
八杉満利子
共著

編集委員
秋月康夫
功力金二郎
佐々木重夫
福原満洲雄
吉田耕作

現代数学講座
1

共立出版株式会社

増補版の序

本書が発行されてから 20 年近くの年月が過ぎた。その間に本書に入れるべき基本的なこととして，Gödel interpretation が現われたので，この機会にこのことを研究された八杉満利子氏に第 3 章として付け加えていただいた。ついでに付録として“哲学と数学基礎論”を付け加えた。これは科学基礎論研究第 39 号第 10 巻 No. 4 に“数学について”という題目で発表されたものであるが，表題が内容にふさわしくないのでこの様に変更したものである。

昭和 48 年 12 月

竹 内 外 史

まえがき

数学基礎論は数学者の間でも，あまりよく理解されない，またあまりよく興味をもたれない分野の一つである．

どうして，数学に用いられる証明自体の構成を研究するこの分野が数学者の関心をよび起さないのであろうか？

どうして，数学によって代表される複雑な人類の論理の研究が理解に価するものと思われないのであろうか？

それは，一つにはよい啓蒙，または啓蒙書が少ないためであろう．

しかし，また一つには数学基礎論の方法があまりにも異質的であるため，とりつきにくく，その大体の模様，問題の焦点，興味の中心等を理解するに多大の煩わしさを経なければならないことにもよるのであろう．

このためか，定義，証明等の厳格さを抜きにした解説はかえって誤解を招きがちに思われる．

例えば，数学における証明の構造を研究するという積極的な学問の意図が，妙にいじけて曲解された数学の基礎づけという消極的な考えにすりかえられて考えられたりする．

また，無矛盾性という数学の問題のもつ面白さ（Riemann の予想の問題のもつ面白さと同じ意味の面白さ）が，無矛盾という言葉のもつ哲学的な理念に覆い尽くされたりする．

なるほど，数学基礎論は集合論の矛盾にその端を発した．その意味で無矛盾性の問題は数学基礎論としてたいせつな問題である．しかし，さらに数学の全局的な研究という意味で数学基礎論はまさに‘数学の基礎づけ’なのである．

無矛盾性の問題はこのような考えかたの試金石，難点の中心としてまさにその面白さが現われてくるのである．

以上のことは，例えば，Gentzen の基本定理によってまざまざと実証される．この定理は決して無矛盾性についての定理ではなく，論理について，これ

まで何人も夢想もし得なかった，実にみごとな美しい定理である．この定理は多くの無矛盾性の問題をその副産物として解決するが，それはこの定理が論理の本体をいかに深く明確に示してくるかを物語る以外の何物でもない．

ある理論の無矛盾性の証明は単に技術的に解決されることはないであろう．現在までの経験が教えるように，それは常にその理論の本質を明示してくるものでなければならないであろう．

その意味でも，解析学，集合論の無矛盾性の問題は現代数学の中心をなす，'集合論理' の研究と深くつながるものである．

ともあれ，これ等のことがらの理解，'数学基礎論' の理解は長いトンネルを経てはじめて達成される．

小文においては，このトンネルの部分を述べた．拙い文章がトンネルのうっとうしさを倍加しはしないかと恐れるけれども，この分野の面白さを一人でも多くの人が理解する助けになれば幸いである．

1956年 9 月

竹 内 外 史

目　　　次

序　　論

G. Cantor によって'集合'の概念が数学に導入されてから，集合の概念が現代数学の中心となった．この集合の概念は次のように表わされる．

'ある x についての命題 $\mathfrak{A}(x)$ があったとき $A=\{x|\mathfrak{A}(x)\}$ なる形を $\mathfrak{A}(x)$ を充たす x の全体とよび**集合**という．$\mathfrak{A}(a)$ を充たす a を A の要素といい $a\in A$ と表わす．$a\in A$ でないとき $a\notin A$ と表わす'

この集合概念は現代数学における最大の普遍概念として，代数であれ，トポロジーであれ，解析学であれ，いずれの分野を問わずほとんど無意識に近いほど何の顧慮もなしに用いられている．しかし，このような集合概念からは多くの矛盾が続出するのであって，例えばその一つである Russell の paradox をあげてみれば，

'いま，$A=\{x|x\notin x\}$ とおけば，

$$A\in A \rightleftharpoons A\in\{x|x\notin x\} \rightleftharpoons A\notin A$$

すなわち $A\in A$ なる命題は自分自身の否定と同等となり明らかに矛盾である'

ところで，ある理論体系から一度矛盾が生ずれば，その理論体系からはいかなる定理でも（またその否定も）証明できるから，その理論体系は全く無価値であることを意味する．この意味で現代数学において上に述べた集合概念を全面的に受入れることはできない．そこで現実的には集合の定義としては上述のものをとり，その概念はそのままでは具合が悪いことを断り，実際には制限して用いることを漠然と述べながら，上の定義から出てくる都合のよいことのみを用いる，というような分裂症状をきたし，あまり整然としない，不透明な外観を呈している状態である．

これに対処する現代数学の正統的態度は何であろうか？

日本数学会編'数学辞典'（岩波）によって見れば，

'逆理を避けるためには公理的集合論が建設され，本項におけるような概念構成はすべて正当づけられている'

また N. Bourbaki; Eléments de mathématique においてもその全体の構成から見れば同じ意見のように思われる．

ここに公理的集合論とは上述の集合の定義から展開される Cantor の素朴集合論から矛盾を除いた都合のよい結果のみを含む公理系であって，本質的には Fraenkel, von Neumann によって整備されたものを Bernays 等によって整理されたものを意味する．ここにいう公理系とは，普通，群の公理等という場合と全く意味の異なるものであって数学基礎論における公理系すなわちそこに用いられる推論方法その他をすべて規定した意味の公理系なのである．

それならば，現代数学は数学基礎論における一つの形式的な公理体系の内部の議論に過ぎないのであろうか？

これを首肯しがたいのは筆者のみではあるまい．公理的集合論は内容的に見ると，あまり意味のはっきりしない形式的体系に過ぎない．素朴集合論における集合概念，いいかえれば現代数学において用いられている集合のようにわれわれの論理的直感を充たしてくれるものではない．例えば，自然数，実数，およびその他の現代数学における生々とした諸分野が単にこのような形式的体系の一部分として考えることはいささかの不満が感じられはしないか．それに公理的集合論が矛盾を含まないということは，いままでの短い年月の間の経験以外に何の保証もないのである．

それならば現代数学をいかに考えるべきか？ 集合概念とは何であるか？ これらの問題が原因になって起ったのが数学基礎論である．

以下において数学基礎論の主流である D. Hilbert に始まる形式主義について述べることにする．

形式主義は数学における証明自身を分析研究して，その法則を見出そうとするものである．このような態度が上に述べたような問題よりさらに基本的であって，このような研究の完成により上述のような疑問は自然に解かれるべきことはいうまでもないであろう．

しかしそのようなことを考えるのには如何なる立場で考えたらよいのであろうか? それはいかなる立場で考えねばならない，ということが必然的に定まる

というわけではないだろうが，といってあまり広い立場——例えば上に述べた集合概念等を自由に許す立場で考えるのはあまり当を得たものではあるまい（しかし現代数学と同じような常識的立場で数学における証明自身を分析研究したとしても，それが十分有意義でもあるし，また興味深いことには変わりない．ただあまり理想的とはいえないまでのことである）．形式主義においては最も純粋な理想的な立場として次に述べる有限の立場をとるのである．

有限の立場

さて，有限の立場ではいかなる対象について考えるのであろうか？　これについて述べるまえにいかなる対象について考えるのが一番理想的であるかを考えてみよう．

ある意味をもった概念について考えるときは，概念を記号または言葉でもって代用する以外にほかなく，記号または言葉はたえずその周辺にいろいろな他の概念を控えていて，その概念とは実は異なるものがあるから何といってもあまりはっきりしないことが多く，時と場合とによっては混乱の起る可能性もあって，あまり理想的ではない．そのような意味においては目前にある有限個の記号およびその有限個の組合せ——それを以下図形とよぶことにしよう——についてのみ考えるのが最も理想的であろう．

しかし有限個の図形についての議論だけでは数学における証明についての有意義な結論は何も出てこないのである．それで有限の立場では次のような無限の図形を定義することを考える．

第一に何か目前にある具体的な記号（一つの図形として考える）を与える．

第二に何か目前にある具体的な図形が与えられたとき，これから具体的な図形を作りだす具体的な手段を与える．

第三にこの場合考える（また定義する）対象を第一と第二とを何度か組合せて作られる図形に限る．

このような無限（有限であってももちろん構わないが）の図形の定義の仕方を‘帰納的’な定義というのである．

いま，一つの例として有限の立場における自然数を帰納的に定義してみよう．

1. 1は自然数である.
2. a が自然数であれば，$a+1$ は自然数である.
3. 以上によってできたもののみが自然数である.

すなわち，有限の立場における自然数とは，1, 1+1, 1+1+1, 1+1+1+1, $\cdots$ のような図形を意味するわけである.

人によっては，ほとんど自明と思われる自然数をこのように帰納的に定義することはとりつきにくく思われるかも知れない．しかしそのような人は一度よく考えていただきたいのである．われわれは自然数の概念を小さいときから教えられ，習慣的になっているけれども，無限の自然数全体というものはそれほど自明の概念ではない．それを定義するには先に述べた危険性のある集合概念を用いるか（それも決して簡単なものではない），またはこのような帰納的な定義をする以外にないのである.

また自然数でなくとも，無限のものを定義するためには，集合概念を用いなければ，この帰納的定義以外にはないようである．そのような意味で，この帰納的な定義の仕方は無限のものを取扱うときには最も純粋な理想的な方法といってよいであろうか．いま，このような帰納的な定義がなされたとき，このような帰納的に定義されたものの一般について考えるということは，この帰納的な定義によって作られた具体的な図形が目前にあると仮定して，思考実験として具体的直観的な議論をすることを意味する．このような推論の方法として，最もよく用いられる‘帰納法’について説明しよう.

いま，帰納的な定義として次の形のものを考えてみよう.

1. $a_1, \cdots, a_n$ は $\mathfrak{D}$ である.
2. $x_1, \cdots, x_k$ が $\mathfrak{D}$ であるとき，$f_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots,$ および $f_j(x_1, \cdots, x_k)$ は $\mathfrak{D}$ である.
3. 以上によってできたもののみが $\mathfrak{D}$ である.

いま，すべての $\mathfrak{D}$ である x について $\mathfrak{A}(x)$ を証明しようと思うとき，

1. $\mathfrak{A}(a_1), \cdots, \mathfrak{A}(a_n)$ を証明する.
2. $\mathfrak{D}$ である $x_1, \cdots, x_k$ について $\mathfrak{A}(x_1), \cdots, \mathfrak{A}(x_k)$ が成立しているとして,

$\mathfrak{A}(f_1(x_1,\cdots,x_k)),\cdots$, および $\mathfrak{A}(f_j(x_1,\cdots,x_k))$ が成立していることを証明する.

この二つのことを証明する方法を‘帰納法’(または詳しく, x についての帰納法) というのである. もしこの二つがいえたとすれば, $\mathfrak{D}$ である具体的な x が目前に与えられたときには, $\mathfrak{A}(x)$ が成立していることを初めから実際に x を作る定義の過程に従って上の 1, 2 により一歩一歩証明してゆくことができる. すなわち具体的に x を与えたときの具体的な証明方法を単に一般的に述べたものと考えることができるわけである.

この帰納法を先に定義した有限の立場における自然数の場合に適用したものがよく知られた‘数学的帰納法’とくによばれるものであるが, もちろんこれは公理ではなく, 自然数 a が実際に与えられれば a の構成の順を追って実行できるはずの証明である (現在有限の立場では自然数が帰納的に定義されたものでそうなるわけである). 帰納的に定義されたものの一般, すなわち‘すべて’の概念は有限の立場において以上のように考えるわけであるが, 有限の立場において‘存在’の概念はどのように考えるわけであろうか? (先に述べたのと同じような意味で‘存在’を観念的に考えるのはあまり理想的ではないであろう).

‘$\mathfrak{A}(x)$ を充たす x が存在する’とは有限の立場では $\mathfrak{A}(x)$ を充たす x を具体的に得る方法をもっていることを意味する.

だから, 上の‘すべて’とこの‘存在’の用い方によれば, ‘$\mathfrak{A}(x)$ なるすべての x に対して $\mathfrak{B}(x,y)$ なる y が存在する’ということは $\mathfrak{A}(x)$ を充たす x が目前に具体的に与えられたとき, この x から $\mathfrak{B}(x,y)$ を充たす y を求める方法があることを意味するわけである.

このように‘存在’の概念を考えるとき, その否定の意味は特別に注意されねばならない. もし上に述べた存在の概念をそのまま否定すれば ‘$\mathfrak{A}(x)$ なる x が存在しない’は‘$\mathfrak{A}(x)$ なる x を得る具体的な方法をもっていない’ということになり, 観念的に $\mathfrak{A}(x)$ なる x を得る具体的なすべての方法を考えてからの判断となり意味不明なあまり理想的でないものになる.

有限の立場では‘$\mathfrak{A}(x)$ なる x が存在しない’とは‘いかなる具体的な x が与えられても $\mathfrak{A}(x)$ でない’という意味に解釈する．これは有限の立場の‘$\mathfrak{A}(x)$ なる x が存在する’の厳密な意味での反対ではないから，この場合頭から排中律の成立を主張することはできない．このことについての具体的な例についての説明は後に述べることにしよう．

また次に‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$ であるということはない’とは‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$ であると仮定すると矛盾する’ことをいう．だから‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$’の反例がある場合すなわち‘$\mathfrak{A}(x)$ でない x が存在する’ときはもちろん‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$ であるということはない’は成立するが逆は有限の立場では必ずしも主張することができない．

以上のように有限の立場について説明すると，有限の立場というものが何か難解煩瑣なものに思われるかも知れないが，実は有限の立場とは帰納的に定義されたものについて最も純粋理想的に考えるならば自然に出てくる所であって，以下の実際の推論においては全く自然に受入れられるであろう．その意味において有限の立場はくどくどと説明するよりも実際にその立場での推論を直ちに展開したほうがよくわかるものといってよいであろう．

後で有限の立場における自然数論と最初の ε 数までの超限順序数論を展開するけれども，読者は途中まで読んで有限の立場の精神が把握できたならば，すなわちそのような方針である程度（それはかなり少ない範囲で十分であるが），自分でも有限の立場における自然数論や超限順序数論の展開できるみきわめがついたならば，一度に飛ばして本論である所の数学における証明についての理論の所へ入っていただきたい．そのようにすることが形式主義に対する正しい入り方と思うからである．

ここで有限の立場について述べたついでに Brouwer に始まる直観主義について述べておこう．

直観主義と論理主義

直観主義においては，上に述べた有限の立場のように直接数学を構成しようとする．しかしこのような有限の立場から初等的な算術の一部以上が構成でき

ないのはほとんど明かであるから，数学を構成することが前提条件である以上どうしても‘数列’とか‘集合’(直観主義においては集合はもう少し狭い概念を意味し，集合自身は他の名前でよばれる）とかを取扱わざるを得ない．この場合現代数学においてこういうものを考えるときの不透明さがそのまま直観主義に入ってくるので，直観主義の主張はしばしば独断的であるといわれる．しかしこのような不透明さは直接数学を構成することが前提条件であるためには止むを得ないものなのであろう．このため直観主義の根本的な主張は‘排中律の拒否’という旗印になるのである．先に述べた Russell の paradox は排中律を用いない paradox であるので，このような直観主義の態度は無意味であるという人もあるが，全然無意味とはいいきれないであろう．

このような直観主義の態度は，有限の立場と現代数学の混血児としてある程度理解できるのであるが，(現代数学ほど直観的に考えられず，直観的な内容をもちえないにしても）筆者には次のような直観主義の推論はどうしても理解できないのである．

‘0と1とからなる無限数列の中で，どこかで0が出たならばその後は0ばかり出るような数列，そのような数列の集合を M とする．そして，各々の自然数に M の元を次のごとくに対応させる．すなわち

1には1のみからなる M の元 11111… を
2には M の元 00000… を
3には 10000… を
4には 11000… を
5には 11100… を
……　……

というように対応させるのである．そして，この対応に関する

‘M の元 x はある自然数に対応している’

という命題を $A(x)$ と表わすことにする．ここに，x の変域は集合 M である．このとき直観主義では

‘すべての x について $A(x)$ であるということはない’

ということが証明できると主張し，次のようなものがその証明であるというのである．

すべての x について $A(x)$ であると仮定する．しからば，ある自然数 n が指定せられて，最初の n 箇が1のみからなる M の元は同じ自然数に対応していなければならない．なぜならば，もしそのような n がなければ，1のみで始まる M の元が対応する自然数はいつまで経っても決定しないからである．しかし，そのような n が存在することは，われわれの与えた対応の法則と矛盾する．

（証明終り）．

この証明というものの中で‘なぜならば，もしそのような n がなければ，…’の所は筆者には理解することができないが，直観主義でもこれ以上詳しく証明しようとはしないようであるし，また直観主義の人に尋ねても納得のいく説明は与えられないのである．この意味で筆者には直観主義は認められないのであるが，このような推論の結果として直観主義の数学は現代数学とは全く異なる数学を形成してしまう．その点では直観主義の主張というのは，はっきりとした現代数学の全面的否定であって，このことがまた直観主義が多くの数学者に認められない大きな原因を形づくっている．

直観主義について述べたのちに数学基礎論のもう一つの大きな分派である論理主義について述べておこう．

論理主義は数学を論理学の一部であると考えて数学を記号論理を用いて徹底的に再編成した．このことは数学には論理以外にいかなる公理が必要かを明らかにしてくれると共に論理主義自身の限界をもはっきりさせたのである．すなわち，形式主義においては数学における証明自身を対象とするのに，論理主義では数学を論理として展開するだけで満足してしまうのである．しかし，はっきりわかるように論理主義は形式主義に近いものであって，あるいは形式主義の一部と考えてもよいかも知れない．また少なくとも形式主義の先祖であると考えるべきであろう．しかし論理主義のその後の発展はしだいに特定な哲学的な立場に立つようになり，むしろ哲学に近く，数学基礎論とは遠ざかったように思われる．

有限の立場における自然数論

さてなるべく常識的に有限の立場における自然数論を展開することにする．

a,b が自然数であるとき，a と b とが同じ形の図形であるときに $a=b$ と書くことにすれば，

$$a=a$$
$$a=b \to b=a$$
$$a=b,\ b=c \to a=c$$

等はすべての自然数 a,b,c について明らかであろう．また a,b が自然数であるとき $a+b$ の形がまた一つの自然数であることも明らかであろう．(厳密には b についての数学的帰納法で証明すればよい)．このとき $+$ の演算およびその他の演算等を多く用いるときその順序を通常のごとくにカッコを用いて表わすことにすれば，

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$a=b \to a+c=b+c$$

がすべての a,b,c について成立することも明らかであろう．

しかし

$$a+b=b+a$$

は直ちには明らかではない．いま，これを証明するためにまず $a+1=1+a$ を a についての数学的帰納法で証明しよう．

まず $a=1$ の場合は $a+1$ も $1+a$ も共に $1+1$ であるから明らかである．故に $a+1=1+a$ が成立しているものとして $(a+1)+1=1+(a+1)$ を証明すればよい．ところで，左辺は帰納法の仮定により $(1+a)+1$ に等しく，これはまた $1+(a+1)$ に等しいことはすでにわかっているから，証明は終ったわけである．

いま，これを用いて $a+b=b+a$ を b についての帰納法によって証明しよう．

まず $b=1$ の場合にはいま証明したばかりであるからよい．

故に $a+b=b+a$ と仮定して $a+(b+1)=(b+1)+a$ を証明しよう．

ところで帰納法の仮定と，すでにわかっていることから

$$a+(b+1)=(a+b)+1=(b+a)+1=b+(a+1)=b+(1+a)=(b+1)+a$$

となって証明は終ったわけである．

いま‘$a+x=b$ なる x が存在する’ことを $a<b$（または $b>a$）と書くことにしよう．定義から明かに

$$a<a+b$$

$$a=b,\ b<c \to a<c$$

$$a=b,\ c<b \to c<a$$

$$a<b,\ b<c \to a<c$$

また c についての数学的帰納法によって次は明らかであろう．

$$a+c=b+c \to a=b$$

また $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ と二つの命題があったとき‘$\mathfrak{A}$ であってかつ $\mathfrak{B}$’という命題を $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ と $\wedge$ なる論理記号を用いて表わし，また $\mathfrak{A}$ でないという命題を $\neg\mathfrak{A}$ と $\neg$ なる論理記号を用いて表わすことにすれば

$$\neg(a=b\wedge a<b)$$

$$\neg(a<b\wedge b<a)$$

は明らかであろう．

また，さらに $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ を二つの命題とするとき，‘$\mathfrak{A}$ または $\mathfrak{B}$’という命題を $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ と $\vee$ なる論理記号を用いて表すことにしよう．明らかに

$$a<b \to a+1=b\vee a+1<b$$

いま，任意の自然数 a をとって考えると a は 1 であるかまたはある自然数 x に対して $x+1$ なる形である．後者の場合は直ちに $a=x+1=1+x$ であるから，任意の自然数 a に対して次のことが成立する．

$$1=a\vee 1<a$$

このことを用いれば，a についての数学的帰納法によって明らかに

$$a<b\vee a=b\vee b<a$$

が任意の自然数 a,b について成立することがわかる．

われわれは普通のように，$a<b\vee a=b$ のことを $a\leq b$（または $b\geq a$）と表わすことにしよう．

いま，a と b と二つの自然数が与えられたとき，$a-b$ なる自然数を次のように定義しよう．

まず，$a\leq b$ ならば $a-b$ は1と定義しよう．（われわれの自然数の中には0が入っていないので止むを得ず1とする）．また $b<a$ のときは定義により $b+x=a$ なる x の求め方がわかっているわけである．$b+x=b+y$ のときは $x=y$ になるからこのような x を $b-a$ と定義すればこの x の求め方によらず $b-a$ が定まるわけである．定義から明らかに

$$a\leq b \rightarrow a-b=1$$

$$b<a \rightarrow b+(a-b)=a$$

$$a=b \rightarrow a-c=b-c$$

$$a=b \rightarrow c-a=c-b$$

$$c<a \rightarrow (a+b)-c=(a-c)+b$$

$$b+c<a \rightarrow (a-b)-c=a-(b+c)$$

さて，有限の立場において $a_1,\cdots,a_n$ の函数 $f(a_1,\cdots,a_n)$ が与えられるとは，具体的に $a_1,\cdots,a_n$ が与えられたときにこれからある具体的な図形を構成（以下に計算とよぶ）する具体的な方法が与えられていることを意味するものとする．その意味で上の $a+b$，$a-b$ はいずれも有限の立場における函数になっているわけである．ここで $a+b$ の場合は計算というにはあまりにも簡単でそのものズバリではあるが，またさらに二つの自然数 a,b が与えられたときにこれらの最大，最小，$\max(a,b)$，$\min(a,b)$ が各々 a,b の函数になることも明らかであろう．以下自然数の場合にこのような函数について考えてみよう．

いま，$f(a_1,\cdots,a_m)$ なる函数と $g_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,g_m(a_1,\cdots,a_n)$ なる函数が与えられているとき

$$f(g_1(a_1,\cdots,a_n),\cdots,g_m(a_1,\cdots,a_n))$$

によって新しい函数が定義できることは明らかであろう．

次に $f(a_1,\cdots,a_n)$ と $g(a_1,\cdots,a_n,a_{n+1},a_{n+2})$ なる自然数の函数が与えられたとき，次のような新しい函数 h を定義しよう．

（1） $h(a_1,\cdots,a_n,1)$ は $f(a_1,\cdots,a_n)$ と定義する．

（2）$h(a_1, \cdots, a_n, x)$ が定義できたとするときに，$h(a_1, \cdots, a_n, x+1)$ を $g(a_1, \cdots, a_n, h(a_1, \cdots, a_n, x), x)$ と定義する．

この計算方式の与え方によって上に述べた意味の新しい函数 h が定義できたことは明らかであろう．すなわち f，g が与えられたときに次の条件を充たす函数 h が常に定義できるわけである．

$$h(a_1, \cdots, a_n, 1) = f(a_1, \cdots, a_n)$$

$$h(a_1, \cdots, a_n, x+1) = g(a_1, \cdots, a_n, h(a_1, \cdots, a_n, x), x)$$

このような h について次の条件が成立することも函数の定義の意味から明らかであろう．

$$a_1 = b_1, \cdots, a_{n+1} = b_{n+1} \rightarrow h(a_1, \cdots, a_{n+1}) = h(b_1, \cdots, b_{n+1})$$

いま，このような定義の一例として $a \times b$ を定義してみよう．すなわち次の式で与えられる．

$$a \times 1 = a$$

$$a \times (x+1) = a \times x + a$$

さて，これらの式から二，三の×についての式を導いてみよう．まず，c についての帰納法により，容易に

$$a \times (b+c) = a \times b + a \times c$$

が得られ，これよりまた明らかに次の式が得られる．

$$b < c \rightarrow a \times b < a \times c$$

また，c についての数学的帰納法により，

$$(a+b) \times c = a \times c + b \times c$$

が得られ，これにより明らかに次の式が得られる．

$$a < b \rightarrow a \times c < b \times c$$

以上のことを用いることによって，初めて数学的帰納法により

$$a \times b = b \times a$$

を得ることができる．

また，さらに以上のことから容易に

$$a \times c = b \times c \rightarrow a = b$$

も得られる．

いま，われわれは新しい函数 a/b を次のごとく定義しよう．

まず，$a<b$ ならば a/b を1と定義する．

また，$b\leq a$ のときには $b\times 1\leq a$ で $a<b\times(a+1)$ であるから，$b\times 1, b\times 2, b\times 3, \cdots, b\times a, b\times(a+1)$ なる $a+1$ 個の自然数を並べてみれば $b\times x\leq a$ で $a<b\times(x+1)$ なる x が必ずただ一つの存在する．この x のことを a/b と定義することにする．

この定義より明らかに次の性質が成立する．

$$a<b\rightarrow a/b=1$$

$$b\leq a\rightarrow b\times a/b\leq a\wedge a<b\times(a/b+1)$$

$$b\leq a\rightarrow b\times(a/b)=a\vee(b\times(a/b)<a\wedge a-b\times(a/b)<b)$$

いま，$\mathfrak{A}(a)$ なる a についての命題があるとき‘$\mathfrak{A}(x)$ を充たす x が存在する’という命題を $\exists x\mathfrak{A}(x)$ と論理記号 $\exists$ を用いて表わすことにすれば，最後の式から

$$b\leq a\rightarrow\exists x(b\times x=a)\vee\exists x\exists y(b\times x+y=a\wedge y<b)$$

がいえるわけである．また明らかに

$$a=b, c=d\rightarrow a/c=b/d$$

となる．割算についてはこのくらいにして，べきについてはわれわれは a^b を次のごとく定義することにする．

$$a^1=a$$

$$a^{x+1}=a^x\times a$$

この二つの式から次の式を有限の立場において求めることは読者への演習問題としておこう．

$$a^{x+y}=a^x\times a^y$$

$$a^{x\times y}=(a^x)^y$$

このように有限の立場における自然数論を展開してゆくことができるが，われわれはこの辺でとどめたいと思う．有限の立場における自然数論は有限の立場において普遍的な補助手段として用いられるので重要である．

いま，ここでさらに $\mathfrak{A}(a)$ という命題があるとき‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$ が成立する’という命題を $\forall x\mathfrak{A}(x)$ と論理記号 $\forall$ を用いて表わすことにし，先に述べた有限の立場における‘すべて’と‘存在’の概念について注意しよう．

先にわれわれは $\neg\exists x\mathfrak{A}(x)$ は理想的な意味で考えにくいので $\forall x\neg\mathfrak{A}(x)$ と定義するといい，このために排中律が自明でないことを述べた．すなわち

$$\exists x\mathfrak{A}(x)\vee\neg\exists x\mathfrak{A}(x)$$

が必ずしも有限の立場においては頭から主張できない．

$\mathfrak{A}(x)$ の特別な場合として，例えば有限の立場において定義される函数 $f(x)$ をとって $f(x)=1$ なるものを考えてみよう．この場合 $\exists x(f(x)=1)$ とは $f(x)=1$ を充たす x を具体的に作る方法を知っていることを意味している．また，$\neg\exists x(f(x)=1)$ は $\forall x\neg(f(x)=1)$ を意味している．すなわち，どんな a が与えられても $f(a)=1$ でないことを主張するものである．明らかに $\forall x\neg(f(x)=1)$ でないとしても $f(x)=1$ なる x を求める具体的な方法を知るわけにはゆかないのである．この具体的な方法を知るまでは $\exists x(f(x)=1)$ が主張できないのであるから，言葉の定義に従えば，われわれは

$$\exists x\mathfrak{A}(x)\vee\neg\exists x\mathfrak{A}(x)$$

が頭からどんな $\mathfrak{A}(x)$ をとっても成立することを主張することができない．もしある $\mathfrak{A}(x)$ についてこれが成立するというときには，この $\mathfrak{A}(x)$ についてこのことを証明してみせなければならないわけである．すなわち排中律を頭から用いることができず，用いる場合にはその個々の場合について証明しなければならないわけである．

また，さらにわれわれはまえに $\neg\forall x\mathfrak{A}(x)$ とは‘$\forall x\mathfrak{A}(x)$ と仮定して矛盾を生じる’ことと考えた．だから $\neg\forall x\mathfrak{A}(x)$ を主張するときは実際に $\forall x\mathfrak{A}(x)$ を仮定して矛盾を導いてみせねばならない．このことを実行するまでは $\neg\forall x\mathfrak{A}(x)$ が主張できないのであるから，いまの場合においても，やはり

$$\forall x\mathfrak{A}(x)\vee\neg\forall x\mathfrak{A}(x)$$

は頭から成立することを主張できないわけである．用いたいときにはその個々

の場合について証明しなければならない．

いま，もし $\exists x \neg \mathfrak{A}(x)$ が成立するならば，具体的な反例によって $\forall x \mathfrak{A}(x)$ が否定された，すなわち $\forall x \mathfrak{A}(x)$ を仮定すれば矛盾が生じることが証明されたことになるから，明らかに

$$\exists x \neg \mathfrak{A}(x) \to \neg \forall x \mathfrak{A}(x)$$

が成立するわけであるが，この逆は頭から主張することができない．なぜならば‘$\forall x \mathfrak{A}(x)$ を仮定して矛盾が生じる’ことをいえたとしても，$\neg \mathfrak{A}(x)$ なる x を具体的に求める方法は何もまだ与えられておらず，この方法が与えられるまでは $\exists x \neg \mathfrak{A}(x)$ を主張することができないからである．また，この逆を頭から主張できないことは，定義として

$$\neg \exists x \mathfrak{A}(x) \rightleftharpoons \forall x \neg \mathfrak{A}(x)$$

が常に主張できることと比べて注意されねばならない．

さて次に有限の立場における最初の ε 数までの超限順序数論を展開することにしよう．

有限の立場における最初の ε 数までの超限順序数論

さて以下において簡単のために有限の立場においては最初の ε 数までの超限順序数を単に順序数とよぶことにして，順序数の帰納的な定義を述べよう．

1.　0, 1 は順序数である．

2.　a が 0 でない順序数であるとき，ω^a は順序数である．

3.　a, b が 0 でない順序数であるとき，$a+1$ および $a+\omega^b$ は順序数である．

実は，この最後にこのようにしてできたもののみが順序数であるとつけ加えねばならないのであるが，帰納的な定義においては一々断るのはめんどうであるから省略することにする．

われわれは ω^1 のことを単に ω と書くことにしよう．いま，$0+a$ と $a+0$ とを a と定義すれば，明らかに a と b とが順序数ならば，$a+b$ もまた順序数であることがわかる．これにより，自然数はもちろん順序数になることがわかるが，以下において，0 も自然数に含めることにする．

さて次に順序数の次元といわれる自然数を任意の順序数に対して定義しよう．

1. 0,1 の次元は 1 である．
2. a が 0 でない順序数でその次元が m のとき，ω^a の次元は $m+1$ である．
3. a, b が共に 0 でない順序数でその次元がそれぞれ m, n のとき，$a+1$ の次元は m, $a+\omega^b$ の次元は $\max(m, n+1)$ である．

順序数 a の次元のことを $\dim(a)$ と書くことにしよう．$\dim(\omega)=2$ とか，自然数の次元が 1 であること等は明らかであろう．また，逆に $\dim(a)=1$ であれば，a を構成の順にたどって順序数の構成の第二番目および第三番目の後半が用いられていないことがわかり，a は自然数でなければならないことがわかるわけである．すなわち $\dim(a)=1$ ということと a が自然数であることとは全く同じことと考えて用いてよいわけである．明らかに次の関係が成立する．

$$\dim(a+b)=\max(\dim(a), \dim(b))$$

また，さらに順序数の長さといわれる自然数を任意の順序数に対して次のように定義しよう．

1. 0 の長さは 0 また 1 の長さは 1 である．
2. ω^a なる形の順序数の長さは 1 である．
3. $a+1$ および $a+\omega^b$ なる順序数の長さは a の長さに 1 を加えたものに等しい．

いま，順序数 a の長さを $l(a)$ と書くことにすれば，次のことは明らかである．

$$l(\omega^a)=1$$

$$l(a+b)=l(a)+l(b)$$

$$\dim(a)=1 \to a=l(a)$$

さて，いま二つの順序数 a, b が与えられたときに，$a=b$ および $a<b$ なる関係を定義するために多少の準備をしよう．

$l(a)=1$ のとき a を単項ということにしよう．a が単項ならば a は ω^b という形であるかまたは 1 でなければならないことは明らかであろう．

まず，すべての 0 でない順序数 a について $0<a$, $\neg(a<0)$ また $0=0$, $\neg(0<0)$ と定義する．$p(a)$ を，a が単項でないかまたは 1 のときには 1, a が ω^b の

形のときは $p(a)=b$ と定義することにしよう．

さらに a が0でない順序数とすれば，a は $a_1+\cdots+a_n$，$n=l(a)$ かつ a_i $(i=1,\cdots,n)$ は単項の形に一意的に書けることおよびこの a_i を $q(a,i)$ と書くことにすれば

$$l(a)<i \text{ のとき } q(a,i)=1$$

とおくことにして，$q(a,i)$ の正確な定義は読者に委ねることにする（a が単項のときは明らかであるから，a の構成の順に従ってやればよい）．

すなわち a は $q(a,1)+\cdots+q(a,l(a))$ と表わされて

$$l(q(a,i))=1, \qquad i=1,2,\cdots,l(a)$$

となるわけである．

以上の準備のもとに二つの順序数 a,b が与えられたとき $a=b$，$a<b$ を次のごとく定義する．

まず，$\dim(a)=1$，$\dim(b)=1$ のときは自然数のとき定義した $a=b$，$a<b$ をそのままとることにする．

一般に $\dim(a)<\dim(b)$ のときは $a<b$ であって，$\neg(a=b)$，$\neg(b<0)$ のものとする．いま，$n>1$ で $\dim(a)<n$，$\dim(b)<n$ のときに $a<b$，$a=b$ の二つの関係が次の条件Cを充たすように定義されているものとしよう．

$$\begin{aligned}
\text{C}:\quad & a=a \\
& a=b\rightarrow b=a \\
& a=b,\ b=c\rightarrow a=c \\
& a=b,\ c=d,\ a<c\rightarrow b<d \\
& a<b,\ b<c\rightarrow a<c \\
& a<b\vee a=b\vee b<a \\
& \neg(a<b\wedge a=b) \\
& \neg(a<b\wedge b<a)
\end{aligned}$$

さて，いま $a<b$，$a=b$ を $\dim(a)=\dim(b)=n$ のときに定義しよう．このとき $l(a)+l(b)$ についての帰納法で定義することにする．

まず，$l(a)=l(b)=1$ のときは $\dim(p(a))=\dim(p(b))=n-1$ であるが，

$$p(a)=p(b)\to a=b$$
$$p(a)<p(b)\to a<b$$

と定義しよう．そうすると $\dim(a)<n$ または $\dim(a)=n$, $l(a)=1$，さらに，$\dim(b)<n$ または $\dim(b)=n$, $l(b)=1$ のときには上の条件 C を充たすことは明らかであろう．

次に $l(a)=1$, $l(b)>1$ の場合を考えよう．このとき b は $q(b,1)+\cdots+q(b,l(b))$ の形になっている．これを簡単のために $b_1+\cdots+b_{l(b)}$ と書くことにしよう．$b_1,\cdots,b_{l(b)}$ については各々 $l(b_i)=1$ $(i=1,\cdots,l(b))$ であるからすでに $<,=$ の関係が定義されている．故に $b_1,\cdots,b_{l(b)}$ の中で最大のものが一つは存在する．この中の一つを b_i としたときに

$$a\leq b_i\to a<b$$
$$b_i<a\to b<a$$

と定義することにする．

$$\dim(a)=\dim(b)=n,\quad l(a)>1,\quad l(b)=1$$

の場合も全く同様なものとする．

次にさらに $\dim(a)=\dim(b)=n$, $l(a)>1$, $l(b)>1$ のとき，$l(a)+l(b)<m$ の場合にはもう定義できていて，条件 C を充たすものとして $l(a)+l(b)=m$ のときを考えよう．いま，a, b をそれぞれ

$$a=a_1+\cdots+a_{l(a)}$$
$$b=b_1+\cdots+b_{l(b)}$$

の形としよう．このとき $a_1,\cdots,a_{l(a)}$ の中の最大のものを a_i；$b_1,\cdots,b_{l(b)}$ の中のものの最大のものを b_j とするとき

$$a_i<b_j\to a<b$$
$$b_j<a_i\to b<a$$

また $a_i=b_j$ のときは，

$$a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{l(a)}<b_1+\cdots+b_{j-1}+b_{j+1}+\cdots+b_{l(b)}\to a<b$$
$$a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{l(a)}=b_1+\cdots+b_{j-1}+b_{j+1}+\cdots+b_{l(b)}\to a=b$$
$$b_1+\cdots+b_{j-1}+b_{j+1}+\cdots+b_{l(b)}<a_1+\cdots+a_{i-1}+a_{i+1}+\cdots+a_{l(a)}\to b<a$$

と定義しよう．このとき条件 C が充たされることは明らかであろう．さらに次のような条件が充たされる．

$$a=b,\ c=d \to a+c=b+d$$
$$a+b=b+a$$
$$(a+b)+c=a+(b+c)$$
$$0<b \to a<a+b$$
$$\dim(a)<\dim(b) \to a<b$$
$$0<c,\ a<\omega^c,\ b<\omega^c \to a+b<\omega^c$$
$$a<b \to \omega^a<\omega^b$$
$$a=b \to \omega^a=\omega^b$$
$$a+b<a+c \to b<c$$
$$a+b=a+c \to b=c$$

このような定義は a と b と二つの順序数を与えたとき，$a=b$ または $a<b$ であるかどうかを判定する具体的な方法を頭から述べたわけではないから，有限の立場における理想的な定義ではない．しかしこのような定義によってもし十分長くくどくなることを覚悟すれば，判定する具体的な法則を述べることのできることは多分明らかであろう（読者の演習に委ねる）．

さて，a を任意の 0 でない順序数としたとき

$$a=a_1+\cdots+a_m \qquad m=l(a) \qquad l(a_i)=1\ \ (i=1,2,\cdots,m)$$

であって $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_m$ のごとくならしめうることは上に述べてきたことによって明らかであろう．もしこのほかにこのような表現すなわち

$$a=b_1+\cdots+b_m \qquad m=l(a)$$
$$b_1\geq b_2\geq\cdots\geq b_m$$

があったとすれば，明らかに $a_i=b_i$ $(i=1,2,\cdots,l(a))$ となるから，このような表現は一意的に定まる．このような表現 $a_1+\cdots+a_m$ を a の**標準形**という．

いま，$a=a_1+\cdots+a_m$，$b=b_1+\cdots+b_n$ において，右辺が各々 a, b の標準形とするとき，

$$a_1=b_1,\cdots,a_{i-1}=b_{i-1},\ a_i<b_i \to a<b \qquad 1\leq i\leq m,n$$

$$a_1=b_1, \cdots, a_{i-1}=b_{i-1},\ b_i<a_i \to b<a$$

$$a_1=b_1, \cdots, a_m=b_m,\ m<n \to a<b$$

$$a_1=b_1, \cdots, a_m=b_m,\ m=n \to a=b$$

$$a_1=b_1, \cdots, a_n=b_n,\ n<m \to b<a$$

となるわけであり，これが普通の $=, <$ の判定法である．

$$a<b \to a+1<b \vee a+1=b$$

は明らかであろう．

次に a と b と二つの順序数が与えられたとき，$a \# b$ を次のように定義しよう．まず a が 0 のときは $0 \# b=b$ と定義する．また，b が 0 のときも $a \# 0=a$ と定義する．

次に a も b も 0 でない順序数とするときは，a, b を標準形に表わしたものをそれぞれ $a_1+\cdots+a_m$, $b_1+\cdots+b_n$ とするとき，次のように定義する．

$$a_m \geq b_1 \to a \# b=a+b$$

$$a_m<b_1 \to a \# b=(a_1+\cdots+a_{m-1}) \# b$$

これが a, b を具体的に与えたとき，$a \# b$ を具体的に作る方法を示していることは明らかであろう．この定義によって次のことは明らかであろう．

$$a=c, b=d \to a \# b=c \# d$$

$$(a \# b) \# c=a \# (b \# c)$$

$$a \# 1=a+1$$

$$a<\omega^b \to a \# \omega^b=\omega^b$$

$$b<c \to a \# b<a \# c$$

$$a \# b<a \# c \to b<c$$

$$a<b \to a \# c \leq b \# c$$

次に自然数 n と順序数 a とを与えたとき $a \cdot n$ を次のように定義しよう．

$$a \cdot 0=0$$

$$a \cdot (n+1)=a \cdot n \# a$$

n が自然数のとき，次のことは明らかであろう．

$$\omega^a \cdot (n+1)=\omega^a \cdot n+\omega^a$$

いま，a が 0 でない順序数であって，$q(a,i)>1$ $(1\leq i\leq l(a))$ のとき a を**極限数**ということにしよう．明らかに a が極限数のときは a を標準形で書けば $\omega^{b_1}+\omega^{b_2}+\cdots+\omega^{b_n}$ という形であり，a が極限数でも 0 でもなければ，a は $b+1$ のような形に書けるわけである．

いま，a が極限数としよう．c は 0 ではなく $c<\omega^a$ とするとき，c を標準形で書いて

$$\omega^{d_1}+c_2+\cdots+c_m$$

a を標準形で表わしたものを

$$\omega^{b_1}+\omega^{b_2}+\cdots+\omega^{b_n}$$

としよう．明らかに $d_1<\omega^{b_1}+\omega^{b_2}+\cdots+\omega^{b_n}$，故に $d_1+1<\omega^{b_1}+\cdots+\omega^{b_n}=a$ したがって $c<\omega^{d_1+1}<\omega^a$ が成立するわけである．

次に a が 0 でも極限数でもないときを考えよう．すなわち $a=a_0+1$ となっているわけである．このとき $c<\omega^a$ としよう．c が 0 でないとして c を標準形に表わして $\omega^{d_1}+c_2+\cdots+c_n$ $(n=l(c))$ とすれば $d_1<a$ すなわち $d_1\leq a_0$ が成立する．故に明らかに $c<\omega^{a_0}\cdot(l(c)+1)<\omega^a$ が成立する．

以上 a が極限数のとき，また 0 でなく極限数でもない順序数の場合の二つのことがらはしばらくあとに用いられる．

さらに，自然数 n に対して

$$\omega_0=1$$
$$\omega_{n+1}=\omega^{\omega_n}$$

と定義すれば，どんな順序数 a に対しても $a<\omega_n$ なる ω_n が存在することは明らかであろう．

さて，0を含めた自然数の場合に，前に述べた数学的帰納法を書き直しておけば，

数学的帰納法：

$\mathfrak{A}(x)$ を有限の立場における命題とするとき，$\mathfrak{A}(0)$ が成立し，どんな自然数 x をとっても $\mathfrak{A}(x)$ が成立するとき $\mathfrak{A}(x+1)$ が成立するならば，どんな自然数 y に対しても $\mathfrak{A}(y)$ が成立する．

という形に述べられることは明らかであろう.

以上の準備のもとにたいせつな次の定理を述べよう.

定　理　$\mathfrak{A}(x)$ を有限の立場における命題とし，どんな順序数 x をとっても，すべての $y<x$ なる y に対して $\mathfrak{A}(y)$ が成立しているときに，$\mathfrak{A}(x)$ が成立するならば，どんな順序数 z をとっても $\mathfrak{A}(z)$ は成立する．[**超限帰納法**]

以下においてこの定理を証明しよう.

(証明)　まず，われわれは $\mathfrak{A}^*(x)$ を‘どんな $y\leq x$ なる y をとっても $\mathfrak{A}(y)$ が成立する’ということの略としよう.

いま，‘$\mathfrak{A}$ ならば $\mathfrak{B}$’という命題を $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ と表わすことにすれば，証明したい超限帰納法は

$$\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}(y))\vdash\mathfrak{A}(x))\to\forall x\mathfrak{A}(x)$$

であり，$\mathfrak{A}^*(x)$ は $\forall y(y\leq x\vdash\mathfrak{A}(y))$ の略となるわけである．簡単のために言葉をこのような記号を用いて表わすことにする．そこで，超限帰納法は任意の順序数 a をとってきたとき

$$\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}(y))\vdash\mathfrak{A}(x))\to\mathfrak{A}(a)$$

がいえればよいわけである.

いま，$\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}(y))\vdash\mathfrak{A}(x))$ を $\mathfrak{B}$ とおこう．明らかに，ω より小さい順序数は自然数に限り，$\mathfrak{B}$ が成立しているときは数学的帰納法によりすべての自然数 n について $\mathfrak{A}(n)$ が成立するから，$\mathfrak{B}$ を仮定すれば $\mathfrak{A}(\omega_1)$ がいえるわけである．$\mathfrak{A}^*(\omega_0), \mathfrak{A}^*(\omega_1)$ はもちろん当然である.

いま，どんな $\mathfrak{A}(x)$ をとってきても

$$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}^*(\omega_n)$$

がいえるものと仮定して，どんな $\mathfrak{A}(x)$ をとってきても

$$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}^*(\omega_{n+1})$$

が証明できたとすれば，すべての ω_n について

$$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}^*(\omega_n)$$

がいえることになるが，もしそうとするならば，$\mathfrak{A}^*(\omega_n)$ は $\forall x(x\leq\omega_n\vdash\mathfrak{A}(x))$ を意味し，またどんな順序数 a をとっても $a<\omega_n$ なる ω_n が存在す

るから，これは $\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}(a)$ を証明したことになり，超限帰納法は証明されるわけである．

故にいま，どんな $\mathfrak{A}(x)$ をとっても

$$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}^*(\omega_n)$$

が証明されるものと仮定して

$$\mathfrak{B}\to\mathfrak{A}^*(\omega_{n+1})$$

を証明することにする．

まず　$c<a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{A}^*(y))\to\mathfrak{A}(c)$

$$\therefore\ c<b,\ b\leq a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{A}^*(y))\to\mathfrak{A}(c)$$

$$\therefore\ b\leq a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{A}^*(y))\to\forall y(y<b\vdash\mathfrak{A}(y))$$

$$\therefore\ \mathfrak{B},\ b\leq a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{A}^*(y))\to\mathfrak{A}(b)$$

$$\therefore\ \mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{A}^*(y))\to\mathfrak{A}^*(a)$$

$$\therefore\ \mathfrak{B}\to\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}^*(y))\vdash\mathfrak{A}^*(x))$$

次に，$\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(z\,\#\,\omega^x))$ を $\mathfrak{C}(x)$ とおこう．そのとき a を任意の順序数とするとき，a が極限数ならば

$$d<b\,\#\,\omega^{a_0},\ a_0<a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\to\mathfrak{A}^*(d)$$

$$\therefore\ d<b\,\#\,\omega^a,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\to\mathfrak{A}^*(d)$$

$$\therefore\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\to\forall y(y<b\,\#\,\omega^a\vdash\mathfrak{A}^*(y))$$

ところで $\mathfrak{B}\to\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}^*(y))\vdash\mathfrak{A}^*(x))$ であるから

$$\mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\to\mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^a)$$

$$\therefore\ \mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y))\to\mathfrak{C}(a)$$

また a が $a=a_0+1$ なる順序数であるときは，

$$\forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ s<a\to\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(z\,\#\,\omega^s))$$

$$\therefore\ n<\omega,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot n)\to\mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot n\,\#\,\omega^{a_0}))$$

$$\therefore\ n<\omega,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot n)\to\mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot(n+1))$$

故に n について数学的帰納法を用いれば

$$n<\omega,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot 0)\to\mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot n)$$

$$\therefore\ n<\omega,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\to\mathfrak{A}^*(b\,\#\,\omega^{a_0}\cdot n)$$

$$\therefore\quad n<\omega,\ d\leq b\#\omega^{a_0}\cdot n,\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\rightarrow\mathfrak{A}^*(d)$$

$$\therefore\quad d<b\#\omega^{a},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\rightarrow\mathfrak{A}^*(d)$$

$$\therefore\quad \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\rightarrow\forall y(y<b\#\omega^{a}\vdash\mathfrak{A}^*(y))$$

ところで　$\mathfrak{B}\rightarrow\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}^*(y))\vdash\mathfrak{A}^*(x))$ であるから

$$\mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y)),\ \mathfrak{A}^*(b)\rightarrow\mathfrak{A}^*(b\#\omega^{a})$$

$$\therefore\quad \mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y))\rightarrow\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(z\#\omega^{a}))$$

$$\therefore\quad \mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y))\rightarrow\mathfrak{C}(a)$$

すなわち，a が極限数のときもそうでないときも，一般に

$$\mathfrak{B},\ \forall y(y<a\vdash\mathfrak{C}(y))\rightarrow\mathfrak{C}(a)$$

$$\therefore\quad \mathfrak{B}\rightarrow\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{C}(y))\vdash\mathfrak{C}(x))$$

故に ω_n についての仮定から，$\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{C}(\omega_n)$ がいえたわけである．

すなわち　$\mathfrak{B}\rightarrow\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(z\#\omega^{\omega_n}))$

故に　$\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A}^*(0)\vdash\mathfrak{A}^*(\omega_{n+1})$

ところで $\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A}^*(0)$ がいえているから

$$\mathfrak{B}\rightarrow\mathfrak{A}^*(\omega_{n+1})$$

がいえて証明が終ったわけである．（終）

この超限帰納法の証明はどんな $\mathfrak{A}(x)$ をとってもというようないいまわしがあるので，あまり有限の立場にふさわしい証明でないように思われるかも知れない．しかし，いまもし具体的に $\mathfrak{A}(x)$ と a とを与えたとき

$$\forall x(\forall y(y<x\vdash\mathfrak{A}(y))\vdash\mathfrak{A}(x))\rightarrow\mathfrak{A}(a)$$

の証明は上に述べた所によって具体的に与えられることを注意していただきたい．すなわち $\omega_2,\omega_3,\cdots$ と a を超える ω_n の所まで以上の証明を何度も繰返すことによって具体的な証明が与えられるわけである．

上のような一般論に不満である人もそのような具体的に与えられた証明に対しては満足させられるであろう．

さていまある順序数 a が与えられたとき，$a>a_1>a_2>\cdots$ なる順序数の系列が与えられたとしよう．このようなどんな系列が与えられても，その系列が有限回で必ず尽きてしまうという命題を $\mathfrak{A}(a)$ と書くことにすれば，この

$\mathfrak{A}(a)$ について

$$\forall y(y<a \vdash \mathfrak{A}(y)) \to \mathfrak{A}(a)$$

は明らかであろう．故に超限帰納法により，われわれはいかなる $a>a_1>a_2>\cdots$ なる順序数の系列をとろうとも，必ず有限回で尽きてしまうことがわかるわけである．このことが有限の立場において，以上の順序数がよく用いられる理由である．すなわちある具体的な操作を与えそれが必ず有限回で完了することをいうための補助手段として用いられるわけである．

第 1 章　証明の形式化

§ 1.　命題の形式化

本章において数学における証明自身を形式化するのであるが，その準備として本節において数学における命題を形式化することにする.

そのために次のような記号を用いる.

1·1　記　　号

特定な対象を表わす記号	;	0,1,$\cdots$
自由変数	;	$a, b, c, \cdots$
束縛変数	;	$x, y, z, \cdots$
函　　数	;	$*_1+*_2$，$*_1\cdot*_2$，$\cdots$
predicate	;	$*_1=*_2$，$*_1<*_2$，$\cdots$
論理記号	;	$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\vdash$，$\forall$，$\exists$

ここに $\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$, $\forall x\mathfrak{A}(x)$, $\exists x\mathfrak{A}(x)$ はそれぞれ内容的には‘$\mathfrak{A}$ でない’，‘$\mathfrak{A}$ であってかつ $\mathfrak{B}$ である’，‘$\mathfrak{A}$ であるかまたは $\mathfrak{B}$ である’ ‘$\mathfrak{A}$ ならば $\mathfrak{B}$ である’，‘すべての x について $\mathfrak{A}(x)$ が成立する’，‘ある x が存在して $\mathfrak{A}(x)$ を充たす’ を表わすわけであるけれども，今後われわれはすべてこのような1·1にあげた記号を意味のないものとして形式的に取扱って研究するものとする.

自由変数 $a, b, c, \cdots$，束縛変数 $x, y, z, \cdots$ は共に数学における普通の変数を表わすわけで，しいて二種類に分ける必要もないが，便宜上ここでは二つに分け，$\forall x\mathfrak{A}(x)$，$\exists x\mathfrak{A}(x)$ のように $\forall$ や $\exists$ の論理記号に結びつけて用いる場合は束縛変数，その他の場合は自由変数を用いることにする.

$+$，$\cdot$ の函数 $<$，$=$ の predicates 共に普通の意味を表わしているものを考えるわけであるが，ここでも論理記号や変数の場合と同じく何の意味もない記号として形式的に取扱い研究するのである.

一般に $f(*_1, \cdots, *_n)$ を函数；$t_1, \cdots, t_n$ を n 個のある対象を表わすものと

すれば，$f(t_1,\cdots,t_n)$ は一つの対象を表わすことになるが，このような場合 f を n 変数の**函数**という．また，$p(*_1,\cdots,*_n)$ を predicate；$t_1,\cdots,t_n$ を n 個の対象を表わすものとすれば，$p(t_1,\cdots,t_n)$ は一つの命題になるわけであるが，このような場合 p を n 変数の **predicate** という．$+$, $\cdot$ は２変数の函数；$<$, $=$ は２変数の predicate になっているわけである．

実際，現代数学においては任意の函数（ここで取扱う函数はいろいろな特定な函数であって，任意の函数ではない）および任意の‘函数の函数’というようなここではあげてない概念を多く用いるけれども，数学における証明自身の形式化という意味ではそれ等はあまり重要な意味をもたないので，ここではいたずらに複雑になるのを避けて，以上のような記号で表わされる範囲において数学の証明自身を研究することにする．

われわれは以下に対象を形式的に表わしたものとして term，そして命題を形式的に表わしたものとして formula を次々と有限の立場において帰納的に定義することとする．

1·2 term の帰納的な定義

1) 特定な対象を表わす記号および自由変数は term である．
2) $f(*_1,\cdots,*_n)$ が n 変数の函数で $t_1,\cdots,t_n$ が n 個の term であるときは，$f(t_1,\cdots,t_n)$ もまた term である．

[term の例]　$(a+b)\cdot c$,　$(1+a^2)\cdot(a^3+0+b)$

1·3 formula の帰納的な定義

1) $p(*_1,\cdots,*_n)$ が n 変数の predicate で，$t_1,\cdots,t_n$ が n 個の term ならば，$p(t_1,\cdots,t_n)$ は formula である．
2) $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ が formula のとき，$\neg\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ はすべて formula である．
3) 一つの formula の中に含まれる，ある自由変数例えば a を，この formula の中にない一つの束縛変数例えば x で全部かえてできたものの前に，$\forall x$ または $\exists x$ をつけたものは formula である．

[formula の例]　$\forall x\exists y((x+y)\cdot a<(1+x^2)\cdot y^3\wedge x^2<y)$

$\exists x(a+1=x \wedge a\cdot(x+1)=1)$ は formula であるが，$\forall x\exists x(x+1=x\wedge x\cdot(x+1)=1)$ は formula の帰納的な定義の 3) の条項の中 '…この formula の中にない一つの束縛変数例えば x …' を充たしていないから formula にはならないわけである．

すでに断らないで用いたけれども，結合の順序を示すためにカッコを用いる．例えば $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ 三つの formula があるとき，まず $\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ とから $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ を作り，この $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ と，$\mathfrak{C}$ とから論理記号 $\vee$ によって結びつけてできた formula は $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vee\mathfrak{C}$ と書けるわけである．$(t_1+t_2)\cdot t_3$ 等も同じである．

$T(a)$ のような形は，二，三の指示された場所において自由変数 a をもった term を意味する．ここで指示された場所は必ずしもこの term の中の全部の a でなくてもよいし，また一つもなくてもよいのである．

$T(t)$ は t が term のとき，$T(a)$ において指示された a の場所に全部 t を代入してできる図形を意味する．例えば $T(a)$ が $(\underline{a}+b)\cdot(a+1)+\underline{a}\cdot(a+1)+1$ で指示された a の場所が下線を施してある所とすれば，$T(t)$ は

$$(t+b)\cdot(a+1)+t\cdot(a+1)+1$$

となるわけである．ここで次のことが成立する．

1·4 $T(a)$ が term で t が term ならば，$T(t)$ は term である．

（証明） $T(a)$ についての帰納法で証明する．

$T(a)$ が特定の対象を表わす記号であるときには，$T(a)$ の中には指示された a はない．故に $T(t)$ は $T(a)$ 自身である故に 1·4 は明らかである．

次に $T(a)$ が自由変数であるときに $T(a)$ が指示された a を含まなければ，$T(t)$ もやはり $T(a)$ 自身であるから 1·4 は成立している．また，$T(a)$ が指示された a を含むときは $T(a)$ は a 自身であり，$T(t)$ は t であるから，やはり 1·4 は成立している．

次に $T(a)$ が $f(T_1(a),\cdots,T_n(a))$ の形であって帰納法の仮定により $T_1(t),\cdots,T_n(t)$ が term であることがわかっているときは，$T(t)$ は $f(T_1(t),\cdots,T_n(t))$ であるから，1·4 は明らかであろう．（終）

$\mathfrak{F}(a)$ のような形は二，三の指示された場所において自由変数 a をもった

formula を意味する．ここで指示された場所は必ずしもこの formula の中のすべての a でなくてもよいし，また一つもなくてもよいものとする．

t が term のとき，$\mathfrak{F}(t)$ はこの指示された a のすべての場所に t を代入してできる図形を意味する．次のことはほとんど明らかであろう．

1·5 $\mathfrak{F}(a)$ が formula で，t が term ならば $\mathfrak{F}(t)$ は formula である．

いま，さらに $\mathfrak{F}(a)$ の指示された a のすべての場所に x を代入してできる図形を $\mathfrak{F}(x)$ と書くことにすれば，formula の帰納的定義の 3) により，次のことが成立する．

1·6 $\mathfrak{F}(a)$ が formula で，$\mathfrak{F}(a)$ に入っていない一つの束縛変数，例えば x をとれば，$\forall x\mathfrak{F}(x)$ および $\exists x\mathfrak{F}(x)$ は formula である．

formula の‘一番外の記号’とは formula の帰納的な構成において，その最後につけ加えた論理記号があれば，その論理記号をいう．

$a=1$ には一番外の記号は無論ない．

$\neg a=1$，$a<2\wedge a=1$，$\forall x(x=1\vee x=a)$，$\exists y\forall x(x+1<y\cdot x)$ においては各々 $\neg, \wedge, \forall, \exists$ が一番外の記号である．

先に結合の順序を示すためにカッコを用いるといったけれども，それらについては煩雑を避けるためにある程度の省略をするのが常識である．例えば，$a+(b\cdot c)$ はやはり普通のように $a+b\cdot c$ という省略形を用いることにする．次に一般に用いられるものとしては $(\neg\mathfrak{A})\wedge\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\wedge(\neg\mathfrak{B})$，$(\neg\mathfrak{A})\vee\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\vee(\neg\mathfrak{B})$，$(\neg\mathfrak{A})\vdash\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\vdash(\neg\mathfrak{B})$，$(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})\vdash\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\vdash(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})$，$(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})\vdash\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\vdash(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})$ はそれぞれ $\neg\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B}$，$\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B}$，$\neg\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\vdash\neg\mathfrak{B}$，$\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$，$\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ と省略される．すなわち $\neg$ が最も結合力が強く，次いで $\wedge$ と $\vee$ とで，$\vdash$ が一番結合力が弱いわけである．この省略は重複して用いられる．例えば $\neg\neg\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}\vee\neg\mathfrak{B}$ は $((\neg(\neg\mathfrak{A}))\wedge\mathfrak{B})\vdash(\mathfrak{C}\vee(\neg\mathfrak{B}))$ の省略である．

われわれはカッコの省略のほかに $(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B})\wedge(\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{A})$ のことを $\mathfrak{A}\leftmodels\!\!\!\dashv\mathfrak{B}$ と省略することにする．もちろん内容的には‘$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{B}$ とは同等である’を意味するわけである．

カッコの省略においてはやはり $\mapsto\!\dashv$ は $\vdash$ と同じく一番結合力が弱いものとして用いられる．すなわち $(\neg\mathfrak{A}) \mapsto\!\dashv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv (\neg\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}) \mapsto\!\dashv \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv (\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}) \mapsto\!\dashv \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv (\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})$ はそれぞれ $\neg\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv \neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \mapsto\!\dashv \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \mapsto\!\dashv \mathfrak{C}$, $\mathfrak{A} \mapsto\!\dashv \mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ と書かれるわけである．

§ 2. 証明の形式化，LK について

本節において，いよいよ数学における証明自身の形式化をおこなうのであるが，本書においては G. Gentzen により考え出された LK とよばれる論理体系によって述べることにする．LK は他の論理体系に比して多少入りにくい点もあるが，その便利さ，美しさ，またそこに成立する Gentzen の基本定理の偉大さは他にその比を見ないものである．LK において著しく他と異なる点は formula の他に実質的に類似な概念‘式’を導入することにある．

2·1 式

$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$; $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ が formula であるとき，

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$$

なる形の図形を**式**という．ここに m, n は 0 であってもよい．

$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ をこの式の**左辺**，$\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ をこの式の**右辺**という．式について多少の解説を試みよう．

$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ は内容的には‘$\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m$ ならば $\mathfrak{B}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n$’を意味するものである．特別な場合として $\quad\to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ や $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to\quad$ も式であってそれぞれ‘$\mathfrak{B}_1\vee\cdots\vee\mathfrak{B}_n$ である’と‘$\mathfrak{A}_1\wedge\cdots\wedge\mathfrak{A}_m$ ならば矛盾する’を意味するわけである．$\quad\to\quad$ も式であって単に‘矛盾が生じた’を意味するのである．故に $\quad\to\quad$ が証明されるような論理体系はあまり意味のある論理体系でないといえるであろう．われわれの LK にはもちろん $\quad\to\quad$ は証明できないようになっている．

式が $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の形であるので $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ や $\mathfrak{B}_1, \cdots, \mathfrak{B}_n$ のように formula を「，」でいくつかつないだような図形を表わす記号を作っておいたほうが便利である．

われわれはギリシア大文字 Γ, Δ, Π, Λ, Φ, Ψ, Ξ, Θ 等によってこれ等を表わすことにしよう．すなわち一般に式は $\Gamma \to \Delta$ と表わされるわけである．ここで，もちろん Γ とか Δ とかは空であってもよいのであって，例えば一般に $\Gamma \to \Delta$ と表わしてもこのように表わされたものの中に，$\Gamma \to$ 　　　や　　$\to \Delta$ や　　　$\to$　　　が入っていてももちろんよいわけである．

このような Γ, Δ および formula $\mathfrak{A}$ 等をさらに並べても用いられる．すなわち，$\Gamma, \Pi \to \Delta$ とか $\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}$ のような形はしばしば用いられるのである．

次に推論を形式化したもの‘推論図’を定義しよう．

2·2 推 論 図

$S_1, \cdots, S_n, S$ が式であるとき

$$\frac{S_1 \cdots S_n}{S}$$

なる形を**推論図**という．

$S_1, \cdots, S_n$ をこの推論図の**上式**，S をこの推論図の**下式**という．内容的には‘$S_1, \cdots, S_n$ 故に S’を意味するものである．

LK においては‘$S_1, \cdots, S_n$ 故に S’が正しい推論の形式化になっているような次の形の推論図のみを取扱う（すなわち LK の推論図という場合 n は1か2である）．

I） 式の構造についての推論図

増　　左 $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$　　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}}$

この二つの推論図の各々において $\mathfrak{D}$ をその推論図の **chief-formula** という．

減　　左 $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$　　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}}$

この二つの推論図の各々において，上式の二つの $\mathfrak{D}$ をこの推論図の **sub-formula** といい，下式の $\mathfrak{D}$ をこの推論図の chief-formula という．

換　　左 $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Pi \to \Lambda}$　　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Lambda}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Lambda}$

この二つの推論図の各々において，上式の $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ をこの推論図の sub-formula

といい，下式の $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ をこの推論図の chief-formula という．

II）三段論法

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

ここに $\mathfrak{D}$ をこの三段論法の chief-formula という．

III）論理記号についての推論図

$\neg$　　左 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}}{\neg\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$　　右 $\dfrac{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\mathfrak{D}}$

この二つの推論図の各々において，上式の $\mathfrak{D}$ をこの推論図の sub-formula といい，下式の $\neg\mathfrak{D}$ をこの推論図の chief-formula という．

$\wedge$　　左（1）$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}$

（2）$\dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$

この三つの推論図の各々において，上式の $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ をその推論図の sub-formula といい，下式の $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ をその推論図の chief-formula という．

$\vee$　　左 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$　　右（1）$\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

（2）$\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

この三つの推論図の各々において，上式の $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ をその推論図の sub-formula といい，下式の $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ をその推論図の chief-formula という．

$\vdash$　　左 $\dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$　　右 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}$

この二つの推論図の各々において，上式の $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ をその推論図の sub-formula といい，下式の $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}$ をその推論図の chief-formula という．

$\forall$　　左 $\dfrac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x \mathfrak{F}(x)}$

ここに t は任意の term である．上式の $\mathfrak{F}(t)$ をこの推論図の sub-

ここに a は下式に入っていないものとする．a をこの推論図の ei-

formula，下式の $\forall x\mathfrak{F}(x)$ を chief-formula という．

genvariable という．また上式の $\mathfrak{F}(a)$をこの推論図の sub-formula，下式の $\forall x\mathfrak{F}(x)$ を chief-formula という．

∃　左 $\dfrac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x\mathfrak{F}(x)\Gamma \to \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists x\mathfrak{F}(x)}$

ここに a は下式に入っていないものとする．a をこの推論図の eigenvariable という．また上式の $\mathfrak{F}(a)$ をこの推論図の sub-formula，下式の $\exists x\mathfrak{F}(x)$ を chief-formula という．

ここに t は任意の term である．上式の $\mathfrak{F}(t)$ をこの推論図の sub-formula，下式の $\exists x\mathfrak{F}(x)$ をこの推論図の chief-formula という．

以上において，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \mathfrak{F}(a), \mathfrak{F}(t)$ はすべて任意の formula でよく，$\Gamma, \Pi, \Delta, \Lambda$ は任意の formula の任意の有限列でよいわけである．また，∀右，∃左の eigenvariable も a でなくとも下式に入っていない自由変数という条件さえ充たせば，b でも c でもよいわけである．

さて，いよいよ証明の形式化‘証明図’の定義を述べることにしよう．

2·3　証　明　図

次の条件を充たす有限個の式からなる図形を**証明図**（または LK の証明図）という．

1)　この証明図のすべての式は‘終式’とよばれるただ一つの例外を除いては，ある推論図の上式である．

2)　すべての式は高々一つの推論図の上式である．

3)　一つの式よりその下式その下式と進んでもとの式に戻ることはない．

4)　（この証明図において）いかなる式の下式にもならない式を（この証明図の）**始式**という．始式は常に $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ なる形である．ここに $\mathfrak{D}$ は任意の formula である．

すなわち，いつも $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ なる形の式で始まり，2·2 に述べた形の推論図に

従って推論を進めた形になっているのが証明図である．

いま，P が証明図でその終式を S とするとき，P を‘S の証明図’という．さらに‘S を **provable**’または‘S は LK で provable’という．

まず，いくつかの証明図の例をあげよう．

$$
\begin{array}{c}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) \\ \hline
\neg\mathfrak{F}(a), \mathfrak{F}(a) \to \\ \hline
\forall x \neg\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(a) \to \\ \hline
\mathfrak{F}(a), \forall x \neg\mathfrak{F}(x) \to \\ \hline
\exists x\mathfrak{F}(x), \forall x \neg\mathfrak{F}(x) \to \\ \hline
\forall x \neg\mathfrak{F}(x) \to \neg\exists x\mathfrak{F}(x)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) \\ \hline
\mathfrak{F}(a) \to \exists x\mathfrak{F}(x) \\ \hline
\neg\exists x\mathfrak{F}(x), \mathfrak{F}(a) \to \\ \hline
\mathfrak{F}(a), \neg\exists x\mathfrak{F}(x) \to \\ \hline
\neg\exists x\mathfrak{F}(x) \to \neg\mathfrak{F}(a) \\ \hline
\neg\exists x\mathfrak{F}(x) \to \forall x \neg\mathfrak{F}(x)
\end{array}
$$

ここで $\mathfrak{F}(a)$ が指示された所以外は a を含まないことが必要である．このような注意は以下略す．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{B}, \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}}{\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}
\qquad\qquad
\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\dfrac{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{B}, \mathfrak{A}}}{\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}
$$

しかし次の二つは2行目へゆく推論に eigenvariable の条件が充たされていないから証明図ではない．

$$
\begin{array}{c}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) \\ \hline
\mathfrak{F}(a) \to \forall x\mathfrak{F}(x) \\ \hline
\exists x\mathfrak{F}(x) \to \forall x\mathfrak{F}(x)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\mathfrak{F}(a) \to \mathfrak{F}(a) \\ \hline
\exists x\mathfrak{F}(x) \to \mathfrak{F}(a) \\ \hline
\exists x\mathfrak{F}(x) \to \forall x\mathfrak{F}(x)
\end{array}
$$

演　習　問　題

次の式への証明図を書け．

1) $\neg\forall x\mathfrak{F}(x) \to \exists x\neg\mathfrak{F}(x)$

2) $\exists x\neg\mathfrak{F}(x) \to \neg\forall x\mathfrak{F}(x)$

3) $\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{A} \to$

4) $\to \mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$

5) $\neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \to \neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B}$

6) $\neg\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{B} \to \neg(\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B})$

7) $\neg(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \to \neg\mathfrak{A} \wedge \neg\mathfrak{B}$

9) $\exists x\forall y\mathfrak{F}(x, y) \to \forall y\exists x\mathfrak{F}(x, y)$

10) $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}$

11) $\mathfrak{A} \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

12) $\forall x(\mathfrak{F}(x) \wedge \mathfrak{G}(x)) \to \forall x\mathfrak{F}(x) \wedge \forall x\mathfrak{G}(x)$

13) $\forall x\mathfrak{F}(x) \wedge \forall x\mathfrak{G}(x) \to \forall x(\mathfrak{F}(x) \wedge \mathfrak{G}(x))$

14) $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{C}) \wedge (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}) \to (\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}) \vee \mathfrak{C}$

15) $\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \to \neg\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$

8)　$\forall x\mathfrak{F}(x) \to \exists x\mathfrak{F}(x)$　　　16)　$\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B} \to \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$

いま，次のような推論図を考えてみよう．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t), \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Delta, \exists x\mathfrak{F}(x), \mathfrak{D}}$$

これはもちろん LK における推論図ではない．しかし次のように LK における推論図をいくつか組合せてできるものと考えてよい．

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t), \mathfrak{D}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}, \mathfrak{F}(t)}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}, \exists x\mathfrak{F}(x)}}{\Gamma \to \Delta, \exists x\mathfrak{F}(x), \mathfrak{D}}$$

このようにLKにおける推論図をいくつか組合せてできる推論図の形を‘LKにおいて許される推論’とよぶことにする．

許される推論はしばしば推論図のごとく省略して用いるものとする．次のようなものが許される推論であることは明らかであろう．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}} \qquad \frac{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$$

$$\frac{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}{\Pi, \Gamma \to \Lambda, \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta} \qquad \frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \qquad \Pi \to \Lambda, \mathfrak{B}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}$$

$$\frac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{B}, \Pi \to \Lambda}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \qquad \frac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta \qquad \Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$$

さて，次の二つの推論図の組合せを考えてみよう．

$$\cfrac{\cfrac{\Pi \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Pi \to \Lambda} \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{A}}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}, \neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}}{\Gamma \to \Delta, \neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}$$

これは明らかに $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ という形を $\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ という形の略と考えれば，$\vdash$ についての推論が式の構造についての推論と $\neg$ についての推論と $\vee$ についての推論とで表わされることを意味している．

すなわち，式の構造についての推論と $\neg$ と $\vee$ についての推論があれば $\vdash$ についての推論は本質的には不要であることを示している．この意味で LK について議論するとき $\vdash$ についての考慮を抜いても本質的には差支えないと考えられるわけである．

演　習　問　題

1. $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ を $\neg(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\mathfrak{B})$ の省略形と考えれば，$\vee$ についての推論図は $\neg$ と $\wedge$ についての推論図の組合せと考えることができる．

2. $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ を $\neg(\neg\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{B})$ の省略形と考えれば，$\wedge$ についての推論図は $\neg$ と $\vee$ についての推論図の組合せと考えることができる．

3. $\forall x\mathfrak{F}(x)$ を $\neg\exists x\neg\mathfrak{F}(x)$ の省略形と考えれば，$\forall$ についての推論図は $\neg$ と $\exists$ についての推論図の組合せと考えることができる．

4. $\exists x\mathfrak{F}(x)$ を $\neg\forall x\neg\mathfrak{F}(x)$ の省略形と考えれば，$\exists$ についての推論図は $\neg$ と $\forall$ についての推論図の組合せと考えることができる．

われわれはすでに例に見られるように，証明図を紙または黒板の上から下へと書いてゆくわけであるが，いまこの証明図における上下を定義しよう．まず

糸の定義　一つの証明図 P が与えられたとき，その一つの始式から始まって，その下式，その下式と順々にゆけば何度かの後に終式に至るが，そうして得られるある始式から終式までの式の列をこの証明図のある**糸**とよぶ．厳密にいうならば，ある証明図が与えられたとき，次のようなこの証明図の式の列を糸という．すなわち最初が始式であり，最後が終式であり，その糸のすべての式は終式を除いては，その下式がこの糸の次の式であるようなものをいう．

証明図 P のある式 S_1 が他の式 S_2 の**上にある**とは，S_1 が S_2 の前にあるようなこの証明図の糸があることをいう．すなわち証明図を上から下へとかいたときに S_1 から順々に下へたどっていったとき S_2 に至る場合をいうわけである．

$$\frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Delta, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}}$$

のような推論図が証明図にあるとき，左の上式 S_1 の上になる式は紙または黒板の上に書かれたときは右の上式 S_2 より高い所にはあるが決して‘S_2 の上にある’とはいわないわけである．

最後に $\Gamma \rightarrow$　　　　を‘Γならば矛盾する’を意味するものと考えることの合理化をおこなおう．

いま，ある formula $\mathfrak{A}$ について $\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}$ と $\Gamma \rightarrow \neg\mathfrak{A}$ とが共に provable であったとせよ．このとき

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow \neg\mathfrak{A} \qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Gamma \rightarrow}}{\dfrac{\Gamma, \Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow}}$$

によって $\Gamma \rightarrow$　　　　が provable になるわけである．

また逆に $\Gamma \rightarrow$　　　　が provable であったとすれば

$$\dfrac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \mathfrak{D}} \qquad\qquad \dfrac{\Gamma \rightarrow}{\Gamma \rightarrow \neg\mathfrak{D}}$$

によって，いかなる $\mathfrak{D}$ をとっても $\Gamma \rightarrow \mathfrak{D}$ も $\Gamma \rightarrow \neg\mathfrak{D}$ も共に provable になるわけである．それ故 $\Gamma \rightarrow$　　　　は普通用いられる意味の‘Γ ならば矛盾する’を表わしていると考えられるわけである．

次に比較的たいせつな二つの補題を証明しよう．

いま，$\mathfrak{F}_1(a), \cdots, \mathfrak{F}_m(a) \rightarrow \mathfrak{E}_1(a), \cdots, \mathfrak{E}_n(a)$ なる形を $\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ と書くことにすれば，$\Gamma(t) \rightarrow \Delta(t)$ は $\mathfrak{F}_1(t), \cdots, \mathfrak{F}_m(t) \rightarrow \mathfrak{G}_1(t), \cdots, \mathfrak{G}_n(t)$ のことであるが，そのとき次のことが成立する．

2・4　$\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ は provable な式で a はこの式の中で指定された場所以外にはないものとする．P を $\Gamma(a) \rightarrow \Delta(a)$ に至る証明図とし，b を P に含まれない自由変数とすれば，P の中にある a を全部 b で代入してできるものを P' とすれば P' もまた証明図になり，その終式は $\Gamma(b) \rightarrow \Delta(b)$ である．

（証明）　P について帰納的に証明する．

まず P が一つの始式 $\mathfrak{D}(a) \rightarrow \mathfrak{D}(a)$ のみからなるときは，P' は $\mathfrak{D}(b) \rightarrow \mathfrak{D}(b)$ でまた一つの始式になるから明らかに成立する．

次に一般の場合に P の最後に用いた推論図 I の形によって分類し P についての帰納法で証明しよう.

1) I の形が式の構造についての推論図または三段論法のとき

この場合はいずれも同じであるから, I が次の形の三段論法の場合考えてみよう.

$$\frac{\Gamma(a) \to \Delta(a), \mathfrak{D}(a) \qquad \mathfrak{D}(a), \Pi(a) \to \Lambda(a)}{\Gamma(a), \Pi(a) \to \Delta(a), \Lambda(a)}$$

帰納法の仮定より $\Gamma(a) \to \Delta(a), \mathfrak{D}(a)$ および $\mathfrak{D}(a), \Pi(a) \to \Lambda(a)$ までの証明図の a を全部 b に変えたものが証明図になっているから

$$\frac{\Gamma(b) \to \Delta(b), \mathfrak{D}(b) \qquad \mathfrak{D}(b), \Pi(b) \to \Lambda(b)}{\Gamma(b), \Pi(b) \to \Delta(b), \Lambda(b)}$$

によって P' がまた証明図になっていることがわかる.

2) I が論理記号についての推論図のとき

この場合 $\forall$ 右が一番むずかしいので, I が $\forall$ 右である場合を証明しよう.

まず a が $\forall$ 右の eigenvariable であるときには I は次の形である.

$$\frac{\Gamma \to \Lambda, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Lambda, \forall x \mathfrak{F}(x)}$$

この場合 $\Gamma \to \Lambda, \mathfrak{F}(a)$ に至る証明図の a を全部 b に変えたものはやはり証明図となっていることが帰納法の仮定によりいえているので

$$\frac{\Gamma \to \Lambda, \mathfrak{F}(b)}{\Gamma \to \Lambda, \forall x \mathfrak{F}(x)}$$

がやはり $\forall$ 右の推論になっているので, P' が証明図であることがわかる.

次に I の eigenvariable が a でないときを考えよう. I は次のような形となる.

$$\frac{\Gamma(a) \to \Lambda(a), \mathfrak{F}(a, c)}{\Gamma(a) \to \Lambda(a), \forall x \mathfrak{F}(a, x)}$$

帰納法の仮定により $\Gamma(a) \to \Lambda(a), \mathfrak{F}(a, c)$ に至るまでの証明図の a に b を代入したものは証明図になっているわけであるから

$$\frac{\Gamma(b) \to \Lambda(b), \mathfrak{F}(b, c)}{\Gamma(b) \to \Lambda(b), \forall x \mathfrak{F}(b, x)}$$

が仮定により b が c とは異なるので，∀ 右の推論図になっているので，P' はやはり証明図になっているわけである．(終)

また上のことと同様に次のことが成立する．

2·5　$\Gamma(a) \to \Delta(a)$ が provable であり，a はここに指定された場所にしかないとする．この式に至る証明図を P，また t は任意の term とし，さらに P の中に用いられる任意の eigenvariable は a でもなく，t にも含まれていないとすれば，P の中の a に全部 t を代入してできたものはまた証明図であり，その終式は $\Gamma(t) \to \Delta(t)$ である．

(証明)　2·4 と同様に P についての帰納法で容易に証明される．(終)

さて，2·5 におけるような $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ に至る証明図 P が与えられたとする．P の中に用いられる一つの eigenvariable c が t に含まれるかまたは a に等しかったとする．その推論図 I を，例えば次のものとする．

$$\frac{\Pi \to \Lambda, \mathfrak{A}(c)}{\Pi \to \Lambda, \forall x \mathfrak{A}(x)}$$

ここで a でもなく，t にも入っていなく，また P の中に一度も用いられていない自由変数 b をとってきて，$\Pi \to \Lambda, \mathfrak{A}(c)$ までの証明図の c に全部 b を代入すれば，これもまた，2·4 により一つの証明図となり，その終式は，$\Pi \to \Lambda$, $\mathfrak{A}(b)$ である．

故に，さらに I の所を

$$\frac{\Pi \to \Lambda, \mathfrak{A}(b)}{\Pi \to \Lambda, \forall x \mathfrak{A}(x)}$$

にかえ，$\Pi \to \Lambda, \forall x \mathfrak{A}(x)$ の上以外は全部 P と同じとすれば，新しい証明図 P_1 を得る．P_1 では t に含まれる自由変数または a が eigenvariable として用いられている回数が，少なくとも P より一回は減っている．故にこのような eigenvariable の変換を何度か適当におこなえばすっかり 2·5 の条件を充たし，その終式が $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ である証明図 P_0 を得る．この P_0 において，全部の a に t を代入すれば，2·5 より，やはり終式が $\Gamma(t) \to \Delta(t)$ である証明図を得る．この証明図を単に ‘P の中の a に t を代入してできる証明図’

とよぶことにする．この定義により次のことが得られた．

2·6 $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ は provable で，a はここに指定された場所にしかないとする．このとき $\Gamma(t) \to \Delta(t)$ もまた provable である．

§3. LK の基本定理

本節において Gentzen によって証明された次の基本定理を証明する．

3·1 式 S が LK において provable ならば，S は三段論法を用いないでも LK で provable である．[**Gentzen の基本定理**]

この定理は論理について成立する美しい法則であって，現在まで人類が論理について得た法則の中では他に比べるもののないほど偉大なものに思われる．その効用はまた後で述べることにしてここではまずこの定理の証明のための二三の準備をする．

まず三段論法に類似の **mixture** とよばれる推論図を導入しよう．

mixture
$$\frac{\Gamma \to \Delta \quad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}(\mathfrak{D})$$

ここに，Π, Δ は共に $\mathfrak{D}$ を含むものとし，Π^*, Δ^* は各々 Π, Δ から $\mathfrak{D}$ の形の formula を取除いてできたものとする．この推論図において上式の Π, Δ に含まれる $\mathfrak{D}$ なる形の formula をこの mixture の chief-formula という．この mixture をしばしば $\mathfrak{D}$ についての mixture という．$\mathfrak{D}$ のことをさらにこの mixture の mixing formula ということにする．

この mixture は次のごとく三段論法と式の構造についての推論図を組合せてできるものと考えられる．

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\text{換，減を何度かおこなって}}}{\Gamma \to \Delta^*, \mathfrak{D}} \qquad \dfrac{\dfrac{\Pi \to \Lambda}{\text{換，減を何度かおこなって}}}{\mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}$$

また逆に三段論法は次のごとく mixture と式の構造についての推論図とを何度か組合せてできるものと考えられる．

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}(\mathfrak{D})}{\cfrac{\text{増，換を何度かおこなって}}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}}$$

すなわち，三段論法と mixture とは式の構造についての推論図を併用すれば，同等なものと考えてよい．したがって本節においては，三段論法を mixture によって生ずるものとし，mixture を基本的な推論図として考えることにする．だから基本定理は次の形で証明すればよいことになる．

3·2 式 S が provable ならば，S は mixture を用いないで（もちろん三段論法は用いないで）provable である．

いま，われわれは次のことがいえていると仮定しよう．

3·3 一番最後の推論のみが mixture であるような証明図 P の終式 S は mixture なしで provable である．

そのとき 3·2 が証明されることをいおう．

(3·2 の証明) 3·2 において式 S に至る証明図を P として，P の中にある mixture の数 n についての数学的帰納法によって証明しよう．

まず，n が 0 のときは P は mixture を含まないから，S が mixture を用いないで provable なことは明らかである．

次に一般の場合を考えよう．P の中にある mixture の中で一番上にある推論図を I とし，I を

$$\frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}(\mathfrak{D})$$

なる形としよう．ここで $\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda$ は 3·3 により mixture を用いないで provable であるから，この式に至る証明図 P_0 で mixture を含まないものがある．

P において $\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda$ に至る証明図を P_0 に変えてできる証明図を P' とすれば，P' は S の証明図であって，P' の中の mixture の数は明らかに n より一つ小さい．故に帰納法の仮定により S は mixture を用いないで provable である．(終)

故にわれわれは 3·3 のみを証明すればよい．故にこの最後に用いられた mixture の形を

3·4
$$\frac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}(\mathfrak{D})$$

なる形として考えよう．

まず一つの formula $\mathfrak{D}$ が与えられたとき，$\mathfrak{D}$ の中に含まれる論理記号の数（同じ論理記号でも多く入っているときは重複して数えることにする）を $\mathfrak{D}$ の **degree** とよぶ．

3·3 の P の mixture 3·4 において，その mixing formula の degree をこの mixture の degree, さらにまた P の degree とよぶことにする．

いま，3·3 の P のある糸 $\mathfrak{F}$ を考えよう．P の終式は 3·4 の下式であるが，その一つ前の式は 3·4 の左の上式 S_1 か右の上式 S_2 かである．それが S_1 であるとき $\mathfrak{F}$ を'左側の糸'といい，S_2 であるとき'右側の糸'といおう．

いま $\mathfrak{F}$ の **rank** を次のように定義する．$\mathfrak{F}$ が左側の糸のときは $\mathfrak{F}$ は S_1 を通る．S_1 の右辺には 3·4 の mixing formula $\mathfrak{D}$ を含んでいる．S_1 から $\mathfrak{F}$ を上に登っていったとき，その上式が初めてその式の右辺に $\mathfrak{D}$ を含まなくなる式を S_0 とすれば，S_0 から S_1 までにある $\mathfrak{F}$ の式の数（S_0, S_1 を含めて数える）を $\mathfrak{F}$ の rank という．もちろん，ここで S_0 から S_1 までの $\mathfrak{F}$ の式は全部その式の右辺に $\mathfrak{D}$ を含んでいるわけである．

同様にして，$\mathfrak{F}$ が右側の糸の場合には $\mathfrak{F}$ は S_2 を通り S_2 の左辺には $\mathfrak{D}$ を含んでいる．S_2 から $\mathfrak{F}$ を上に登っていったとき，その上式が初めてその式の左辺に $\mathfrak{D}$ を含まなくなる式を S_0 とすれば S_0 から S_2 までにある $\mathfrak{F}$ の式の数を $\mathfrak{F}$ の rank という．以上の二つの場合にもちろん S_0 は始式の場合もありうるわけである．

3·4 の'右の rank' R_r とは右側の $\mathfrak{F}$ を動かしたときのその rank の最大数をいう．同じく'左の rank' R_l とは左側の $\mathfrak{F}$ を動かしたときのその rank の最大数をいう．明らかに $R_r \geq 1$ また $R_l \geq 1$ が成立する．

最後に 3·4 の rank R とは $R_r + R_l$ のことをいう．この R は同時に P

の rank ともよばれる．明らかに $R \geq 2$ である．

さてこれから 3·3 を，3·4 の degree を g，rank を R としたとき，g と R についての二重帰納法によって証明する．二重帰納法ということがわかりにくい人は $\omega \cdot g + R$ についての超限帰納法と思っていただきたい．この帰納法を証明するためには，まず $g=0$，$R=2$ の場合を証明して後に一般の場合に入るわけであるが，$g=0$，$R=2$ の場合の証明は $R=2$ の一般の場合の証明に含まれてしまうので，直ちに一般の場合に入ることにする．

3·5　$R=2$ すなわち $R_r=1$，$R_l=1$ のとき

S_1 および S_2 に至る証明図の種類によって分類しよう．

1)　S_1 が始式のとき：　このときは 3·4 は次の形と思ってよい．

$$\frac{\mathfrak{D} \to \mathfrak{D} \quad \Pi \to \Lambda}{\mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda}\ (\mathfrak{D})$$

われわれは mixture を用いない $\mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda$ の証明図を次のごとく得ることができる．

$$\begin{array}{c} \Pi \to \Lambda \\ \hline \text{何度か換をおこなって} \\ \hline \mathfrak{D}, \cdots, \mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda \\ \hline \text{何度か減をおこなって} \\ \hline \mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda \end{array}$$

2)　S_2 が始式のとき：　証明は 1) の場合と全く同様におこなえばよい．

3)　S_1 がある推論図 I_1 の下式であって，I_1 が式の構造についての推論図であるとき：

I_1 が '増右' でその chief-formula が mixing formula である場合以外は S_1 の右辺にある formula は必ず I_1 の上式の右辺にも存在する（推論図を一見すれば明らか）．すなわち $R_l > 1$ となるから，$R_l=1$ の仮定から I_1 は '増右' であって I_1 および 3·4 は次の形と思ってよい．

$$S_1 \cdots\cdots \frac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0}{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{D}} \cdots\cdots I_1 \qquad \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta_0, \Lambda}\ (\mathfrak{D})$$

（ここで Δ_0 の中に $\mathfrak{D}$ が入っていないことも $R_l=1$ より明らか）

われわれは mixture なしの $\Gamma, \Pi^* \to \Delta_0, \Lambda$ の証明図を次のごとく得ることができる.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0}{\text{何度か増をおこなって}}}{\Pi^*, \Gamma \to \Delta_0, \Lambda}}{\dfrac{\text{何度か換をおこなって}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta_0, \Lambda}}$$

4) S_2 がある推論図 I_2 の下式であって, I_2 が式の構造についての推論図であるとき：　証明は 3) と同様にやればよい.

5) S_1, S_2 が各々ある推論図 I_1, I_2 の下式であって, I_1, I_2 が共に論理記号についての推論図であるとき：

いま, S_1 の右辺にある任意の formula を考えてみよう. これは I_1 の chief-formula でない限り, I_1 の上式の右辺にやはり存在する（推論図を一見して明らか). 故に $R_l=1$ の仮定より S_1 の mixing formula は I_1 の chief-formula でなければならない. 同様にして $R_r=1$ より S_2 の mixing formula は I_2 の chief-formula でなければならない. いま, さらに $\mathfrak{D}$ の一番外の記号により場合を分けよう.

（i） $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\neg$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\neg\mathfrak{A}$ なる形としよう.

この場合 I_1 は $\neg$右, I_2 は $\neg$左 であり, I_1, I_2 および 3·4 は次の形でなければならない.

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta_0}{\Gamma \to \Delta_0, \neg\mathfrak{A}} \qquad \dfrac{\Pi_0 \to \Lambda, \mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}\ (\neg\mathfrak{A})$$

われわれは mixture がその最後にしか用いられておらず, その形が次の形であるような証明図を作ることができる.

$$\dfrac{\Pi_0 \to \Lambda, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta_0}{\Pi_0, \Gamma^\# \to \Lambda^\#, \Delta_0}\ (\mathfrak{A})$$

ここで $\Gamma^\#, \Lambda^\#$ は各々 Γ, Λ の中にある $\mathfrak{A}$ なる形の formula を Γ, Λ から取去ってできたものである.

さてこの証明図の degree を考えると明らかに 3·4 の degree より（1だけ）小さくなっている．故に帰納法の仮定により $\Pi_0, \Gamma^{\#} \to \Lambda^{\#}, \Delta_0$ は mixture なしに provable である．故に $\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda$ の mixture なしの証明図を次のように作ることができる．

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_0, \Gamma^{\#} \to \Lambda^{\#}, \Delta_0}{\text{何度か増，換をおこなって}}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}$$

(ii)　$\mathfrak{D}$ の一番外の記号が ∧ のとき

このとき $\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\land\mathfrak{B}$ の形としよう．I_1 は ∧ 右，I_2 は ∧ 左 (1) のときと ∧ 左 (2) のときに分かれるが，どちらでも同じであるから ∧左 (1) としよう．'7 の場合' と同じようにして，I_1, I_2,　3·4 は次のような形でなければならない．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{B}}{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A}\land\mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda}{\mathfrak{A}\land\mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda} (\mathfrak{A}\land\mathfrak{B})$$

われわれは終りのほうが次のような形の証明図を作ってみよう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \Pi_0{}^{\#} \to \Delta_0{}^{\#}, \Lambda} (\mathfrak{A})}{\text{何度か増と換をおこなって}}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}$$

ここで $\mathfrak{A}$ についての mixture の degree は明らかに 3·4 の degree よりも小であるから帰納法の仮定より mixture を取去ることができるのは明らかであろう．

(iii)　$\mathfrak{D}$ の一番外の記号が ∨ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}$ とするとき，次のようなものを考えればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}} \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda \qquad \mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}{\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda} (\mathfrak{A}\lor\mathfrak{B})$$

次によって明らかであろう．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A} \qquad \mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \Pi_0{}^{\#} \to \Delta_0{}^{\#}, \Lambda} (\mathfrak{A})}{\text{何度か増，換をおこなって}}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}$$

(iv) $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\vdash$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ とするとき，次のようなものを考えればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{B}}{\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}}\qquad\dfrac{\mathfrak{B},\Pi_0\rightarrow\Lambda_0\quad\Pi_1\rightarrow\Lambda_1,\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B},\Pi_0,\Pi_1\rightarrow\Lambda_0,\Lambda_1}}{\Gamma,\Pi_0,\Pi_1\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0,\Lambda_1}(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B})$$

まず次のものと考えよう．

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A},\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{B}\qquad\mathfrak{B},\Pi_0\rightarrow\Lambda_0}{\mathfrak{A},\Gamma,\Pi_0{}^*\rightarrow\Delta_0{}^*,\Lambda_0}(\mathfrak{B})}{\dfrac{\text{何度か増，換をおこなって}}{\mathfrak{A},\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0}}$$

これによって帰納法の仮定より $\mathfrak{A},\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0$ が mixture なしに provable なことは明らかである．故に

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_1\rightarrow\Lambda_1,\mathfrak{A}\qquad\mathfrak{A},\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0}{\Pi_1,\Gamma^\#,\Pi_0{}^\#\rightarrow\Lambda_1{}^\#,\Delta_0,\Lambda_0}(\mathfrak{A})}{\dfrac{\text{何度か増，換をおこなって}}{\Gamma,\Pi_0,\Pi_1\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0,\Lambda_1}}$$

によって，$\Gamma,\Pi_0,\Pi_1\rightarrow\Delta_0,\Lambda_0,\Lambda_1$ が mixture なしで provable なことを得る．

(v) $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\forall$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\forall x\mathfrak{F}(x)$ としよう．次の形のものを考えればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{F}(a)}{\Gamma\rightarrow\Delta_0,\forall x\mathfrak{F}(x)}\qquad\dfrac{\mathfrak{F}(t),\Pi_0\rightarrow\Lambda}{\forall x\mathfrak{F}(x),\Pi_0\rightarrow\Lambda}}{\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda}(\forall x\mathfrak{F}(x))$$

ところで eigenvariable についての条件から Γ, Δ_0, $\mathfrak{F}(x)$ には a が入っていないから $\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{F}(a)$ から，$\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{F}(t)$ は 2·5 により mixture なしで provable である．故に

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma\rightarrow\Delta_0,\mathfrak{F}(t)\qquad\mathfrak{F}(t),\Pi_0\rightarrow\Lambda}{\Gamma,\Pi_0{}^\#\rightarrow\Delta_0{}^\#,\Lambda}(\mathfrak{F}(t))}{\dfrac{\text{増，換を何度かおこなって}}{\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda}}$$

によって，$\Gamma,\Pi_0\rightarrow\Delta_0,\Lambda$ が mixture なしで provable なことがわかる．

(vi) $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\exists$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\exists x\mathfrak{F}(x)$ とすれば，次の形を考えればよい．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Delta_0, \exists x\mathfrak{F}(x)} \qquad \dfrac{\mathfrak{F}(a), \Pi_0 \to \Lambda}{\exists x\mathfrak{F}(x), \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}$$

$\forall$の場合と同じように $\mathfrak{F}(t), \Pi_0 \to \Lambda$ は mixture なしで provable であるから，次のもので考えれば明らかであろう．

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{F}(t) \quad \mathfrak{F}(t), \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \Pi_0{}^{\#} \to \Delta_0{}^{\#}, \Lambda}\ (\mathfrak{F}(t))}{\dfrac{\text{増，換を何度かおこなって}}{\Gamma, \Pi_0 \to \Delta_0, \Lambda}}$$

次に，$R>2$ すなわち $R_l>1$ または $R_r>1$ のときを考えよう．

3·6　$R_r>1$ のとき

1)　3·4 において，Γ が $\mathfrak{D}$ を含んでいるとき：

このときは次のように mixture なしの $\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda$ が得られる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Pi \to \Lambda}{\text{換と減とを何度かおこなって}}}{\mathfrak{D}, \Pi^* \to \Lambda}}{\dfrac{\text{増と換とを何度かおこなって}}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}}$$

2)　3·4 において S_2 がある推論図 I_2 の下式であって，I_2 が式の構造についての推論であるか，または論理記号についての推論図で I_2 の chief-formula が Π の中の $\mathfrak{D}$ でないとき：

I_2 および 3·4 を次の形とする．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\Phi \to \Psi}{\Pi \to \Lambda}\ I_2}{\Gamma, \Pi^* \to \Delta^*, \Lambda}\ (\mathfrak{D})$$

この場合次の mixture に終る証明図を作ってみる．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Phi \to \Psi}{\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi}\ (\mathfrak{D})$$

この mixture の degree は 3·4 の degree と等しい．また左の rank も等しい．しかし，右の rank はちょうど 1 だけ小さい．故に帰納法の仮定により $\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi$ は mixture なしに証明できる．

故にわれわれは次のものを考える.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \Phi^* \to \Delta^*, \Psi}{\text{換を何度かおこなって}}}{\Phi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Psi}}{\Pi^*, \Gamma \to \Delta^*, \Lambda}\, I_3$$

ここで I_3 が一つの推論図になっていることは, I_2 の一つ一つについて確かめてみれば明らかである. (是非確かめよ) I_2 が二つの上式をもつ場合も同様.

3) 3·4 において, Γ は $\mathfrak{D}$ を含まず, S_2 が論理記号に関する推論 I_2 の式であって, I_2 の chief-formula が $\mathfrak{D}$ であるとき:

この場合 $\mathfrak{D}$ の一番外の記号によって分類して考えるが, 他の場合は類似により簡単に考えられるから $\vee$, $\vdash$, $\exists$ のときのみをおこなおう.

(i) $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\vee$ であるとき

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ としよう. 3·4 および I_2 は次のような形である

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda \qquad \mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$$

われわれは次の二つの mixture に終る証明図を考えよう.

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{A}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}) \qquad \dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$$

この二つの mixture において degree および左の rank は 3·4 の degree および左の rank と等しいが, また右の rank は 3·4 の rank より小さい.

故に帰納法の仮定により, $\Gamma, \mathfrak{A}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda$ と $\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda$ は mixture なしで provable である. その mixture なしの証明図を P_1, P_2 としよう.

次の形の証明図を考えよう. ただし $\Gamma, \mathfrak{A}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda$ と $\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda$ に至る証明図を各々 P_1, P_2 とする.

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}{\text{換を何度かおこなう}}}{\mathfrak{A}, \Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda} \qquad \dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}{\text{換を何度かおこなう}}}{\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}}{\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Gamma, \Pi_0^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\,(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$$

この mixture の degree は 3·4 の degree に等しい．また左の rank は 3·4 の左の rank に等しい．ところで右の rank は，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi_0{}^*$ の中に $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$ は入っていないから，ちょうど 1 に等しい．故に 3·4 の rank より小である．故に帰納法の仮定により $\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda$ は mixture なしで provable である．

故に次のものを考えればよい．

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}{\text{換，減を何度かおこなって}}}{\Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}$$

(ii)　$\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\vdash$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$ とする．3·4 および I_2 は次の形である．

$$\cfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \cfrac{\mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda_0 \qquad \Pi_1 \to \Lambda_1, \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}, \Pi_0, \Pi_1 \to \Lambda_0, \Lambda_1}}{\Gamma, \Pi_0{}^*, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0, \Lambda_1}\,(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B})$$

前の場合と同様にして，次の二つのものを考えれば

$$\cfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda_0}{\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0}\,(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}) \qquad \cfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \Pi_1 \to \Lambda_1, \mathfrak{A}}{\Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \mathfrak{A}}\,(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B})$$

$\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0$；$\Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \mathfrak{A}$ は mixture なしに provable である．故に次の mixture を考えれば

$$\cfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \cfrac{\cfrac{\cfrac{\Gamma, \mathfrak{B}, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0}{\text{何度か換をおこなって}}}{\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0} \qquad \Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_1, \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}, \Gamma, \Pi_0{}^*, \Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0, \Delta^*, \Lambda_1}}{\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^*, \Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_0, \Delta^*, \Lambda_1}\,(\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B})$$

前の場合と同じように $\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^*, \Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_0, \Delta^*, \Lambda_1$ は mixture なしに provable である．故に次のものを考えればよい．

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^*, \Gamma, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda_0, \Delta^*, \Lambda_1}{\text{何度か換と減をおこなって}}}{\Gamma, \Pi_0{}^*, \Pi_1{}^* \to \Delta^*, \Lambda_0, \Lambda_1}$$

(iii)　$\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\exists$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\exists x\mathfrak{A}(x)$ としよう．3·4 および I_2 は次のようになる．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\mathfrak{A}(a), \Pi_0 \to \Lambda}{\exists x \mathfrak{A}(x), \Pi_0 \to \Lambda}}{\Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\exists x \mathfrak{A}(x))$$

この証明図の中に一度も表われない自由変数 b をとろう．$\mathfrak{A}(a), \Pi_0 \to \Lambda$ に至る証明図の中の a を全部 b に変えたものは 2・4 により mixture を含まない証明図である．

いま次の形の mixture に終る証明を考えよう．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{A}(b), \Pi_0 \to \Lambda}{\Gamma, \mathfrak{A}(b), \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}\,(\exists x \mathfrak{A}(x))$$

明らかに帰納法の仮定によりこの mixture はとり去ることができる．故に次の形のものを考えよう．

$$\dfrac{\Gamma \to \Delta \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma, \mathfrak{A}(b), \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}{\text{換を何度かおこなって}}}{\mathfrak{A}(b), \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}}{\exists x \mathfrak{A}(x), \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda}}{\Gamma, \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Delta^*, \Lambda}\,(\exists x \mathfrak{A}(x))$$

ここで b はとり方により $\exists x \mathfrak{A}(x), \Gamma, \Pi_0{}^* \to \Delta^*, \Lambda$ の中に含まれていない．故にここに用いられた推論図は∃左の推論図になっている．また最後に用いられた mixture は 3・4 と degree，左の rank が等しく，右の rank が小さくなっている．故に帰納法の仮定により，取除くことができる．

3・7 $R_l > 1$ のとき

$R_r > 1$ の場合と同様にやればよい．

§4. 基本定理の応用

本節において，基本定理の二，三の応用を述べることにする．

まず次のことが成立する．

4・1 LK に矛盾が生じない．すなわち LK で $\quad\to\quad$ は provable でない（このことを **LK は無矛盾である**という）．

（証明） もし $\quad\to\quad$ が provable であるならば，三段論法を

用いないで　　　→　　　は provable でなければならない．ところで下式に chief-formula が存在しない推論図は三段論法しかない．故に三段論法を用いないで　　　→　　　が初めて出てくる推論図はあり得ない．すなわち　　　→　　　は provable でない．(終)

この証明においてもわかるように，推論図において三段論法以外の推論図は上式より下式が簡単になっていることはない．すなわち三段論法なしの証明図は上から下へだんだん複雑になってゆく証明と考えてよい．その意味で三段論法なしの証明図とは，全然無駄のない証明図とも考えられるわけである．だから基本定理は証明ができるときは回り道をしない証明が必ず存在することを主張するものと考えてよい．例えば‘対偶をとって証明できればとらないで必ずできる’とか，‘帰謬法(背理法)を用いて証明できれば，帰謬法を用いないで証明できる’というようなことをさらに一般にした定理が基本定理と考えてよいわけである．次に二，三の定義をしよう．

公理　自由変数を含まない formula を**公理** (axiom) という．

公理系　有限または無限(有限の立場で定義ができている)の公理 A_1, $A_2, A_3, \cdots$ が与えられたとき，一つの**公理系**が与えられたという．

公理系もわれわれはしばしば，ギリシア大文字 $\Gamma_0, \Pi_0, \cdots$ などで表わす．(公理系の場合のみ $\Gamma_0, \Pi_0, \cdots$ は無限個の formula を表わしていることがある)

一つの公理系 Γ_0 が与えられたとき

$$\Gamma_0, \Gamma \to \Delta$$

が provable であるとは，Γ_0 の中の適当な有限個の公理 $A_1, \cdots, A_n$ をとったとき，$A_1, \cdots, A_n, \Gamma \to \Delta$ が provable なことを意味する．

さらに $\Gamma_0, \Gamma \to \Delta$ が provable のとき‘Γ_0 のもとで $\Gamma \to \Delta$ が provable’とか‘Γ_0 のもとで $\Gamma \to \Delta$ が得られる’とかいう．とくに $\Gamma_0 \to \mathfrak{A}$ が provable ならば‘Γ_0 のもとで $\mathfrak{A}$ が provable’とか‘Γ_0 から $\mathfrak{A}$ が出る’とか‘Γ_0 から $\mathfrak{A}$ が得られる’とかいう．$\Gamma_0 \to$　　　が provable でないとき，Γ_0 を**無矛盾**という．

正規な公理および公理系　ある formula が $\forall x_1\cdots\forall x_n\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ なる形で $\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ に論理記号 $\forall, \exists$ が入っていないとき，この formula は**正規**であるという．このとき $\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ をこの formula の**核**という．ここで n は零でも構わない．ある公理系 Γ_0 が与えられたとき，Γ_0 のすべての公理が正規であるとき，'Γ_0 は正規である' という．

正規な formula の分解形　ある正規な formula を $\forall x_1\cdots\forall x_n\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ とし，$\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ をこの formula の核とする．このとき $\forall x_{i+1}\cdots\forall x_n\mathfrak{F}(t_1, \cdots, t_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ なる形の formula をこの formula の**分解形**($i=0$ すなわち自分自身も含む) という．ここで $t_1, \cdots, t_i$ は任意の term である．とくに $\mathfrak{F}(t_1, \cdots, t_n)$ なる形の分解形を**完全分解形**という．とくにある分解形 $\forall x_{i+1}\cdots\forall x_n\mathfrak{F}(t_1, \cdots, t_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ が公理であるとき（すなわち $t_1, \cdots, t_i$ に自由変数が入っていなく $\forall x_1\cdots\forall x_n\mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ が公理であるとき）この分解形をもとの公理の**分解公理**という．また，とくに完全分解形のときは**完全分解公理**という．

以上の準備のもとに，次のたいせつな定理が成立する．

4·2　Γ_0 を正規な公理系とし，P を $\Gamma_0 \rightarrow$ 　に至る三段論法なしの証明図とするとき，P は次の条件を充たす．

1)　P の中の formula はすべて正規である．

2)　P の中のある formula $\mathfrak{D}$ が論理記号 $\forall$ をもっているとき，$\mathfrak{D}$ は $\mathfrak{D}$ の属する式の左辺にある（このことを単に $\mathfrak{D}$ は左辺にあるという）．

3)　$\exists$ についての推論図は一つも用いられていない．

4)　P の中のある formula $\mathfrak{D}$ が論理記号 $\forall$ をもっているならば，$\mathfrak{D}$ は Γ_0 のある公理の分解形である．

5)　P の中で推論図 $\forall$ 右は一度も用いられていない．

(証明)　まず 1) と 2) とを同時に証明する．すなわち，もし 1) か 2) かを充たさない formula $\mathfrak{D}$ が P の中にあったとする．P の終式 $\Gamma_0 \rightarrow$ は 1) と 2) を充たすから，その上式には 1) か 2) かを充たさない formula $\mathfrak{D}$ があって，その下式にはそのようなもののない推論図 I が必ず存在する．

式の構造についての推論は実質的に上式にある formula がまた下式にもあるから，式の構造についての推論ではあり得ない．故に I は論理記号についての推論で $\mathfrak{D}$ はその sub-formula でなければならない．もし $\mathfrak{D}$ が正規でなければ I の chief-formula ももちろん正規であり得ないから，$\mathfrak{D}$ は正規でなければならない．また $\mathfrak{D}$ が $\forall$ をもって右辺にあれば，I の chief-formula も $\forall$ をもって右辺にあるか，または $\neg\mathfrak{D}$ の形でなければならない．いずれにしても I の下式の中の formula が 1), 2) を充たすことに矛盾する．したがってこのような $\mathfrak{D}$ はあり得ない．故に P が 1), 2) を充たすことがいえた．

3) は 1) によって明らかである．すなわち $\exists$ についての推論図があれば，その chief-fomula は $\exists$ を含んでいて正規ではなくなるからである．

5) は 2) によって明らかである．すなわちもし $\forall$ 右が用いられれば，その chief-formula は右辺にあって $\forall$ を含んでいるからである．

最後に 4) をいおう．もし Γ_0 の $\forall$ を含んだ分解形でない formula が P の中にあったとする．P の終式 $\Gamma_0 \rightarrow$　　　は Γ_0 の分解形のみからなるからその上式には $\forall$ を含み Γ_0 の分解形ではない formula $\mathfrak{D}$ をもち，その下式で $\forall$ をもつ formula はすべて Γ_0 の分解形であるような推論図 I がある．明らかに I は論理記号についての推論で $\mathfrak{D}$ がその sub-formula でなくてはならない．$\mathfrak{D}$ に $\forall$ がある故，I の chief-formula $\mathfrak{D}_0$ にも $\forall$ があるので，I は $\forall$ 左でなければならない（そうでなければ $\mathfrak{D}_0$ は正規でなくなる）．すなわち I は次のような形である

$$\frac{\mathfrak{G}(t), \Gamma \rightarrow \Delta}{\forall x \mathfrak{G}(x), \Gamma \rightarrow \Delta}$$

ここで $\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{G}(t)$ である．仮定により $\forall x \mathfrak{G}(x)$ はある Γ_0 の公理 $\forall x_1 \cdots \forall x_n \mathfrak{F}(x_1, \cdots, x_n)$ の分解形である．すなわち $\forall x \mathfrak{G}(x)$ は $\forall x_i \cdots \forall x_n \mathfrak{F}(t_1, \cdots, t_{i-1}, x_i, \cdots, x_n)$ なる形である．すなわち $\mathfrak{G}(t)$ は $\forall x_{i+1} \cdots \forall x_n \mathfrak{F}(t_1, \cdots, t_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \cdots, x_n)$ であって，やはり Γ_0 の分解形となり矛盾する．（終）

4·3　$g_i(*_1, \cdots, *_{m_i})$ $(i=1, \cdots, n)$ なる函数と s なる特定な対象を表わす記号とさらに term t が与えられたとき，t の中の $g_1, \cdots, g_n$ を全部 s に置き

かえてできる図形 $\tilde{t}$ を次のように帰納的に定義する.

1) t が $g_1,\cdots,g_n$ を一つも含まないならば, $\tilde{t}$ は t 自身である.

2) t が $f(t_1,\cdots,t_k)$ で, f が $g_1,\cdots,g_n$ のいずれでもなく, さらに $t_1,\cdots,t_k$ の中にある $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s にかえてできる図形を $\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_n$ とするとき, $\tilde{t}$ は $f(\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_k)$ である.

3) t が $f(t_1,\cdots,t_k)$ なる形で, f が $g_1,\cdots,g_n$ のいずれかであるとき, $\tilde{t}$ は s である.

次のことは直ちに明らかであろう.

4·4 t が term であるとき, t の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で置きかえたものはやはり term である.

4·5 $\mathfrak{A}$ が formula であるとき, $\mathfrak{A}$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を s でおきかえてできる図形 $\tilde{\mathfrak{A}}$ を次のごとく帰納的に定義する.

1) $\mathfrak{A}$ が $p(t_1,\cdots,t_k)$ の形であり, $t_1,\cdots,t_k$ の中にある $g_1\cdots g_n$ を全部 s におきかえてできる term を各々 $\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_k$ とすれば, $\tilde{\mathfrak{A}}$ は $p(\tilde{t}_1,\cdots,\tilde{t}_k)$ である.

2) $\mathfrak{B}$ および $\mathfrak{C}$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で置きかえてできる図形を $\tilde{\mathfrak{B}}$ および $\tilde{\mathfrak{C}}$ とすれば, $\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$ か $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$ か $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$ かまたは $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$ かであるに従って $\tilde{\mathfrak{A}}$ は各々 $\neg\tilde{\mathfrak{B}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}\wedge\tilde{\mathfrak{C}}$, $\tilde{\mathfrak{B}}\vee\tilde{\mathfrak{C}}$ または $\tilde{\mathfrak{B}}\vdash\tilde{\mathfrak{C}}$ である.

3) $\mathfrak{A}$ が $\forall x\mathfrak{B}(x)$ または $\exists x\mathfrak{B}(x)$ であり, $\mathfrak{B}(a)$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s でおきかえてできる図形を $\tilde{\mathfrak{B}}(a)$ とすれば $\tilde{\mathfrak{A}}$ は各々 $\forall x\tilde{\mathfrak{B}}(x)$ または $\exists x\tilde{\mathfrak{B}}(x)$ である.

次のことは明らかであろう.

4·6 $\mathfrak{A}$ が formula であるとき, $\mathfrak{A}$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s に変えてできた図形 $\tilde{\mathfrak{A}}$ は, やはり formula である.

4·7 $T(a)$ と t が term で, $T(a)$ と t の中にある $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s に変えてできたものを各々 $\tilde{T}(a)$ および $\tilde{t}$ とする. $T(t)$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s に変えてできる term t_0 は $\tilde{T}(\tilde{t})$ に等しい.

(証明) $T(a)$ についての帰納法で証明する. $T(a)$ の中に a が一つも入っ

ていなければもちろん明らかである.

$T(a)$ が a のときは, $T(t)$ は t, $\tilde{T}(\tilde{t})$ は $\tilde{t}$ であるから明らかである.

$T(a)$ が $f(T_1(a),\cdots,T_k(a))$ で f が $g_1,\cdots,g_n$ のいずれでもないとき, t_0 は $f(\widetilde{T_1(t)},\cdots,\widetilde{T_k(t)})$ であり, これは帰納法の仮定により $f(\tilde{T}_1(\tilde{t}),\cdots,\tilde{T}_k(\tilde{t}))$ すなわち $\tilde{T}(\tilde{t})$ に等しく 4·7 が成立する.

$T(a)$ が $f(T_1(a),\cdots,T_k(a))$ で f が $g_1,\cdots,g_n$ のいずれかであるときは, t_0 も $\tilde{T}(\tilde{t})$ も共に s となり, やはり 4·7 は成立する. (終)

これにより明らかに次のことが成立する.

4·8 $\mathfrak{F}(a)$ は formula, t が term のとき, $\mathfrak{F}(a)$ と t の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s に変えてできる図形を各々 $\tilde{\mathfrak{F}}(a)$, $\tilde{t}$ とする. $\mathfrak{F}(t)$ の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s に変えてできる formula は $\tilde{\mathfrak{F}}(\tilde{t})$ に等しい.

さて次のたいせつな定理が成立する.

4·9 証明図 P の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で変えれば, やはり一つの証明図を得る.

(証明) P についての帰納法で証明する. P が $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ なる形の始式のみからなるときは, $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で変えたものは $\tilde{\mathfrak{D}}\to\tilde{\mathfrak{D}}$ となって 4·9 が成立する. 故に任意の推論図の中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で変えたときやはり推論図になることをいえばよい. その場合は $\forall$ 左の場合と同様かまたは簡単に証明されるから $\forall$ 左の場合のみを考える.

$$\frac{\mathfrak{F}(t),\Gamma\to\varDelta}{\forall x\mathfrak{F}(x),\Gamma\to\varDelta}$$

4·8 によりこの中の $g_1,\cdots,g_n$ を全部 s で変えたものは次の形となる.

$$\frac{\tilde{\mathfrak{F}}(\tilde{t}),\tilde{\Gamma}\to\tilde{\varDelta}}{\forall x\tilde{\mathfrak{F}}(x),\tilde{\Gamma}\to\tilde{\varDelta}}$$

これは明らかに一つの推論図 $\forall$ 左である. 故に証明はなされた. (終)

4·10 $p_i(*_1,\cdots,*_{n_i})$ $(i=1,\cdots,n)$ を predicate, $p_0(*_1,\cdots,*_{n_0})$ は $p_1,\cdots,p_n$ のいずれとも異なる predicate とする. s_0 は特定な対象を表わす記号とし, さらに $\mathfrak{A}$ を任意の formula とする. $\mathfrak{A}$ の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,$

$\cdots,s_0)$ に変えてできる図形 $\mathfrak{A}^*$ を次のごとく帰納的に定義する.

1) $\mathfrak{A}$ が $p_1,\cdots,p_n$ を含まなければ $\mathfrak{A}^*$ は $\mathfrak{A}$ 自身である.

2) $\mathfrak{A}$ が $p(t_1,\cdots,t_k)$ で p が $p_1,\cdots,p_n$ のいずれかであれば, $\mathfrak{A}^*$ は $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ である

3) $\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$ かであり, $\mathfrak{B},\mathfrak{C}$ の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ に変えてできたものを $\mathfrak{B}^*,\mathfrak{C}^*$ とすれば, $\mathfrak{A}^*$ は各々 $\neg\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}^*\wedge\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{B}^*\vee\mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{B}^*\vdash\mathfrak{C}^*$ である.

4) $\mathfrak{A}$ が $\forall x\mathfrak{B}(x)$ か $\exists x\mathfrak{B}(x)$ であり, $\mathfrak{B}(a)$ の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ に変えてできたものを $\mathfrak{B}^*(a)$ とすれば, $\mathfrak{A}^*$ は各々 $\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ であるか, $\exists x\mathfrak{B}^*(x)$ である.

ここで次のことは明らかであろう.

4・11 $\mathfrak{A}$ が formula ならば, $\mathfrak{A}^*$ も formula である.

さらに次のことが成立する.

4・12 $\mathfrak{F}(a)$ の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ で変えたものを $\mathfrak{F}^*(a)$ とし, $\mathfrak{F}(t)$ の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ で変えたものを $\mathfrak{C}$ とすれば, $\mathfrak{C}$ は $\mathfrak{F}^*(t)$ に等しい.

(証明) $\mathfrak{F}(a)$ について帰納的に証明しよう.

$\mathfrak{F}(a)$ が $p_1,\cdots,p_n$ を含まないならば, $\mathfrak{C}$ も $\mathfrak{F}^*(t)$ も $\mathfrak{F}(t)$ であり, 明らか.

$\mathfrak{F}(a)$ が $p_i(t_1,\cdots,t_{ni})$ の形ならば, $\mathfrak{C}$ も $\mathfrak{F}^*(t)$ も $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ であり, 明らか.

$\mathfrak{F}(a)$ に論理記号があるときはその論理記号により分類すれば明らか (* と論理記号が交換可能だから). (終)

このことにより次のことは明らかであろう.

4・13 証明図 P の中の $p_1,\cdots,p_n$ を全部 $p_0(s_0,\cdots,s_0)$ で変えれば, やはり一つの証明図を得る.

以上の準備によって, 次の重要な定理が証明される.

4・14 Γ_0 は正規な公理系でその中に特定な対象についての記号 s_0 を含んでいるものとする. いまもし $\Gamma_0\rightarrow$ が provable ならば, $\Gamma_0\rightarrow$

に至る証明図 P_0 で次のものを充たすものがある．

1)　P_0 は三段論法，∃ についての推論図，∀右を含まない．

2)　P_0 は自由変数を含まない．P_0 に含まれる函数，特定な対象を表わす記号および predicate はすべて Γ_0 に含まれる．

3)　P_0 の中の formula はすべて ∃ をもたず，また，さらに ∀ をもつ P_0 の中の formula は Γ_0 の公理の分解公理である．

（証明）　もし $\Gamma_0 \to$ 　　　が provable ならば，基本定理により $\Gamma_0 \to$ 　　　に至る三段論法なしの証明図 P が存在する．P は 4·2 により，4·2 の 1)，2)，3)，4)，5) を満足する．もしこの P の中に自由変数，Γ_0 に含まれない特定な対象を表わす記号，および Γ_0 に含まれない函数 $g_1, \cdots, g_n$ および predicate $p_1, \cdots, p_m$ があったとすれば，それら全部を s_0 および $p_0(s_0, \cdots, s_0)$ に変えてできたものを P_0 とすれば，P_0 は 2·5 および 4·9，および 4·1 により，また一つの証明図であり，その終式は明らかに $\Gamma_0 \to$ 　　　である．P_0 はなお 4·14 の 1)，2)，3) を充たすことは明らかであり，証明は完成された．（終）

4·15　Γ_0 を特定な対象を表わす記号を含む正規な公理系とする．Γ_0 の完全分解公理系 $\tilde{\Gamma}_0$ とは Γ_0 の公理の完全分解公理で Γ_0 に含まれない特定な対象を表わす記号，函数，predicate を含まないものの集まりと定義する．

4·16　Γ_0 が特定な対象を表わす記号を含む正規な公理系とし，$\tilde{\Gamma}_0$ を Γ_0 の完全分解公理系とするとき $\Gamma_0 \to$ 　　　が provable ならば $\tilde{\Gamma}_0 \to$ 　　　も provable である．すなわち $\tilde{\Gamma}_0$ が無矛盾ならば，Γ_0 も無矛盾である．

（証明）　$\Gamma_0 \to$ 　　　が provable ならば，4.14 の 1)，2)，3) を充たす $\Gamma_0 \to$ 　　　に至る証明図 P_0 が存在する．いま，P_0 の任意の式 $\Gamma \to \Delta$ があったとき

$$\tilde{\Gamma}_0, \Gamma^* \to \Delta$$

が provable であることを $\Gamma \to \Delta$ までに用いた推論図の数についての帰納法で証明する．

ここで Γ^* は Γ から ∀ の論理記号をもった formula を全部除いてでき

たものである.

まず $\Gamma\to\Delta$ が $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ のときは，$\tilde{\Gamma}_0,\Gamma^*\to\Delta$ は $\tilde{\Gamma}_0,\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ であるから，明らかである．あとは $\Gamma\to\Delta$ がある推論図 I の下式の場合を考えればよいが，$\forall$ 左の場合を除き，他の場合は明らかであるから，I が $\forall$ 左のときのみを考える．I は次の形と思ってよい．

$$\frac{\mathfrak{F}(t),\Gamma_1\to\Delta}{\forall x\mathfrak{F}(x),\Gamma_1\to\Delta}$$

ここで $\mathfrak{F}(t)$ が $\forall$ を含むか含まないかによって場合を分けよう．

$\mathfrak{F}(t)$ が $\forall$ を含むときは，帰納法の仮定により $\tilde{\Gamma}_0,\Gamma_1^*\to\Delta$ が provable であることがいえている．故によい．

$\mathfrak{F}(t)$ が $\forall$ を含まないときは，P_0 のとり方により $\mathfrak{F}(t)$ は Γ_0 の公理の完全分解公理である．また帰納法の仮定により $\tilde{\Gamma}_0,\mathfrak{F}(t),\Gamma_1^*\to\Delta$ が provable だから

$$\cfrac{\tilde{\Gamma}_0,\mathfrak{F}(t),\Gamma_1^*\to\Delta}{\cfrac{\text{換，減を何度かおこなって}}{\tilde{\Gamma}_0,\Gamma_1^*\to\Delta}}$$

によって証明された．(終)

4・17 特定の対象を表わす記号 $s_1,s_2,\cdots$，函数 $f_1,f_2,\cdots$，predicate $p_1,p_2,\cdots$ が与えられたとき，いまこれを $\mathfrak{S}$ で表わすことにして，$\mathfrak{S}$ の記号および $\neg$，$\wedge$（ここでは簡単のために $\vee$，$\vdash$ は $\neg$，$\wedge$ で表わして考えるものとする）のみで作られた公理の集まりを $\tilde{\mathfrak{S}}$ としよう．$\tilde{\mathfrak{S}}$ の任意の公理に対して $+,-$ を対応させる対応の仕方 $\mathfrak{D}$ が与えられて次の条件を充たすとき，$\mathfrak{S}$（または $\tilde{\mathfrak{S}}$）は $\mathfrak{D}$ で**決定される**という．

$\tilde{\mathfrak{S}}$ の公理 $\mathfrak{A}$ に対して $\mathfrak{D}$ によって対応されるものを $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ と表わすことにすれば，

1) $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ が $+$ ならば $\mathfrak{D}(\neg\mathfrak{A})$ は $-$ であり，$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ が $-$ ならば $\mathfrak{D}(\neg\mathfrak{A})$ は $+$ である．

2) $\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$，$\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ 共に $+$ ならば，$\mathfrak{D}(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$ は $+$ であり，$\mathfrak{D}(\mathfrak{A})$ または $\mathfrak{D}(\mathfrak{B})$ が $-$ ならば $\mathfrak{D}(\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B})$ は $-$ である．

このとき次の定理が成立する.

4・18　$\mathfrak{S}$ を決定する $\mathfrak{D}$ があるとき，Γ_0 を $\tilde{\mathfrak{S}}$ の部分で Γ_0 の公理はすべて $\mathfrak{D}$ によって $+$ になるとすれば，Γ_0 は無矛盾である.

（証明）　いまもし $\Gamma_0 \rightarrow$　　　　が provable として，$\Gamma_0 \rightarrow$　　　　に至る証明図 P は三段論法を含まないものとしてよい．さらに P の中の formula はすべて $\tilde{\mathfrak{S}}$ に含まれるものと考えてもよい.

いま，始式 $\mathfrak{D} \rightarrow \mathfrak{D}$ を見れば，次の条件を充たしている.

条件：　右辺に $+$ があるか左辺に $-$ がある.

ところで終式 $\Gamma_0 \rightarrow$　　　　は明らかにこの条件を充たしていない．故にその上式がこの条件を充たし，下式がこの条件を充たさない推論図 I が存在する．ところで I は P の中にない所の三段論法や $\forall$ および $\exists$ についての推論ではもちろんあり得ないから，一つ一つあたってみればこのような推論図があり得ないことは明らか．故に証明された．（終）

以上の準備のもとに，帰納法なしの自然数論の無矛盾性の証明をするのであるが，そのまえにその予行演習の意味も兼ねて，基本定理だけから出る簡単な無矛盾性の証明をなしておこう.

4・19　$\forall x \forall y (x=y)$ は無矛盾である.

（証明）　$\forall x \forall y (x=y) \rightarrow$　　　　が provable として，この式に至る三段論法なしの証明図を P としよう．このとき P の式について次の条件を考えよう.

条件：　右辺が空で，左辺は論理記号 $\neg$ を含んでいない.

明らかに P の終式はこの条件を充たしている．また始式は右辺が空でないからこの条件を充たしていない．故にその上式 S_1 がこの条件を充たさず，その下式 S_2 がこの条件を充たす推論図 I が必ず存在する.

I の上式 S_1 は条件を充たさないわけであるが，S_1 が $\neg$ を含むとすれば，もちろん下式 S_2 も $\neg$ を含んで矛盾する．また S_1 の右辺に formula が存在するとすれば，S_2 の右辺は空であるから I は $\neg$ 左についての推論でなければならないが，そうすれば I の chief-formula は $\neg$ を含む．すなわち S_2

は $\neg$ を含むことになり矛盾する.（終）

4・20 $\forall x(x=x)$, $\forall x\forall y(x=y\vdash y=x)$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z\vdash x=z)$ は無矛盾である.

（証明） この三つの公理を $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3$ としよう. 明らかに

$$\forall x\forall y(x=y)\to\mathfrak{D}_1$$

$$\forall x\forall y(x=y)\to\mathfrak{D}_2$$

$$\forall x\forall y(x=y)\to\mathfrak{D}_3$$

の三つの式は provable である. 故に $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_2 \to$ 　　　　が provable ならば三度三段論法を用いることにより, $\forall x\forall y(x=y)\to$ 　　　　が provable となり, 4・19 に矛盾する.（終）

この証明と全く同様にして次のことが得られる.

4・21 次の公理系は無矛盾である.

$\forall x(x=x)$, $\forall x\forall y(x=y\vdash y=x)$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z\vdash x=z)$
$\forall x\forall y\forall z(x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z)$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\vdash x\cdot z=y\cdot z)$,
$\forall x\forall y\forall z(x=y\vdash z\cdot x=z\cdot y)$, $\forall x(x\cdot e=x)$, $\forall x(x^{-1}\cdot x=e)$

さていよいよ数学的帰納法なしの自然数論の無矛盾性を証明しよう. まず無矛盾を証明しようとする公理系 $\Gamma_a{}^0$ を次のごとく定義する. 次の公理系を $\Gamma_a{}^0$ とする.

$\forall x(x=x)$, $\forall x\forall y(x=y\vdash y=x)$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y=z\vdash x=z)$,
$\forall x\forall y\forall z((x+y)+z=x+(y+z))$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\vdash x+z=y+z)$,
$\forall x\forall y(x+y=y+x)$, $\forall x(1<x\vee 1=x)$, $\forall x\forall y(x<x+y)$,
$\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge y<z\vdash x<z)$, $\forall x\forall y\forall z(x=y\wedge z<y\vdash z<x)$,
$\forall x\forall y\forall z(x<y\wedge y<z\vdash x<z)$, $\forall x\forall y\forall z(x+z=y+z\vdash x=y)$,
$\forall x\forall y\neg(x=y\wedge x<y)$, $\forall x\forall y\neg(x<y\wedge y<x)$,
$\forall x\forall y\forall z(x<y\vee x=y\vee y<x)$, $\forall x\forall y(x<y\vee x=y\vdash x-y=1)$,
$\forall x\forall y\forall z(x=y\vdash x-z=y-z)$, $\forall x\forall y(y<x\vdash y+(x-y)=x)$,
$\forall x\forall y\forall z(x=y\vdash z-x=z-y)$, $\forall x(x\times 1=x)$, $\forall x\forall y(x\times y=y\times x)$,
$\forall x\forall y\forall z(x\times(y+z)=x\times y+x\times z)$, $\forall x\forall y\forall z(y<z\vdash x\times y<x\times z)$,

$\forall x \forall y \forall z(x\times z=y\times z \vdash x=y)$, $\forall x \forall y \forall z(x=y \vdash x\times z=y\times z)$,

$\forall x \forall y(x<y \vdash x/y=1)$,

$\forall x \forall y(y<x \vee y=x \vdash y\times(x/y)=x \vee (y\times(x/y)<x \wedge x-y\times(x/y)<y)$,

$\forall x \forall y \forall z(x=y \vdash x/z=y/z)$, $\forall x \forall y \forall z(x=y \vdash z/x=z/y)$

いま, 1, $*_1+*_2$, $*_1\times*_2$, $*_1-*_2$, $*_1/*_2$, $*_1<*_2$, $*_1=*_2$ および 7 と $\wedge$ (これらを組合せてできるものとして $\vee$ と $\vdash$ も考える) で作られる formula を考えれば, これは明らかに有限の立場における自然数論において意味をもった命題であり, 有限の立場において真偽を決定することができる. いま, われわれは有限の立場において真ならば +, 偽ならば − とおこう. 明らかに $\Gamma_a{}^0$ の完全分解公理系のすべての公理はこれによって + となる. 故に 4·16 および 4·18 により, 次の定理を得る.

4·22 $\Gamma_a{}^0$ は無矛盾である.

この方法はもっと活用することができる. すなわち $\Gamma_a{}^0$ よりもっと広くても, 有限の立場において定義できる概念 (具体的に与えられた) について一般的に成立する性質を多くつけ加えた公理系をこの方法によって無矛盾だということを証明できるわけである. 次章において, 数学的帰納法を含んだ自然数論の無矛盾性を証明するけれども, やはりこのような方法が一つの基本的な手段となっている.

§ 5. equality axioms について

5·1 Γ_0 が predicate $*_1=*_2$ を含んでいる公理系で, $\forall x(x=x)$ は Γ_0 から provable でさらに Γ_0 に含まれる任意の predicate p, 任意の函数 f をとるとき

$$\Gamma_0, a_1=b_1, \cdots, a_i=b_i,\ p(a_1, \cdots, a_i) \to p(b_1, \cdots, b_i)$$

および
$$\Gamma_0, a_1=b_1, \cdots, a_j=b_j \to f(a_1, \cdots, a_j)=f(b_1, \cdots, b_j)$$

が provable ならば, Γ_0 は **equality axioms** を充たすという.

5·2 Γ_0 が equality axioms を充たすならば

$$\Gamma_0 \to \forall x \forall y(x=y \vdash y=x)$$

および　$$\Gamma_0 \to \forall x \forall y \forall z(x=y \wedge y=z \vdash x=z)$$

は provable である．

（証明）　$*_1=*_2$ は Γ_0 に入っている predicate であるから，仮定により

$$\Gamma_0, a=b, a=a, a=a \to b=a$$

$$\Gamma_0, \forall x(x=x) \to \forall x \forall y(x=y \vdash y=x)$$

ところで仮定により $\Gamma_0 \to \forall x(x=x)$ であるから，$\forall x \forall y(x=y \vdash y=x)$ は Γ_0 のもとで provable である．

次に全く同様に

$$\Gamma_0, a=a, b=c, a=b \to a=c$$

故に　$$\Gamma_0, \forall x(x=x) \to \forall x \forall y \forall z(x=y \wedge y=z \vdash x=z)$$

よって Γ_0 から $\forall x \forall y \forall z(x=y \wedge y=z \vdash x=z)$ は明らか．（終）

5·3　Γ_0 が equality axioms を充たし，term $T(a_1, \cdots, a_i)$ の中に含まれるすべての函数が全部 Γ_0 に含まれているならば

$$a_1=b_1, \cdots, a_i=b_i, \Gamma_0 \to T(a_1, \cdots, a_i)=T(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable である．

（証明）　$T(a_1, \cdots, a_i)$ の中に含まれる函数の数について帰納的に証明する．

$T(a_1, \cdots, a_i)$ が a なる形のときは，a が $a_1, \cdots, a_i$ のいずれかであるか，またはいずれでもないかにより $T(a_1, \cdots, a_i)=T(b_1, \cdots, b_i)$ は各々 $a_k=b_k$ または $a=a$ になるが，いずれにしても 5·3 が成立することは明らかである．

故に $T(a_1, \cdots, a_i)$ が $f(T_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, T_n(a_1, \cdots, a_i))$ のときを考えればよい．帰納法の仮定により

$$a_1=b_1, \cdots, a_i=b_i, \Gamma_0 \to T_1(a_1, \cdots a_i)=T_1(b_1, \cdots, b_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1=b_1, \cdots, a_i=b_i, \Gamma_0 \to T_n(a_1, \cdots, a_i)=T_n(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable である．

また，さらに Γ_0 が equality axioms を充たしている仮定から明らかに

$$T_1(a_1, \cdots, a_i)=T_1(b_1, \cdots, b_i), \cdots, T_n(a_1, \cdots, a_i)=T_n(b_1, \cdots, b_i),$$

$$\Gamma_0 \to T(a_1, \cdots, a_i) = T(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable である．故に 5·3 が成立することは明らか．(終)

5·4　Γ_0 が equality axioms を充たし，formula $\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ の中に含まれるすべての函数および predicate が全部 Γ_0 に含まれるならば，

$$a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i), \Gamma_0 \to \mathfrak{A}(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable である．

(証明)　$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ の中の論理記号の数についての帰納法で証明しよう．

論理記号を含まないとき，すなわち $\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ が $p(T_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, T_n(a_1, \cdots, a_i))$ のときは，5·3 により

$$a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \Gamma_0 \to T_1(a_1, \cdots, a_i) = T_1(b_1, \cdots, b_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \Gamma_0 \to T_n(a_1, \cdots, a_i) = T_n(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable であり，また Γ_0 が equality axioms を充たすことにより

$$T_1(a_1, \cdots, a_i) = T_1(b_1, , \cdots, b_i), \cdots, T_n(a_1, \cdots, a_i) = T_n(b_1, \cdots, b_i),$$
$$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i), \Gamma_0 \to \mathfrak{A}(b_1, \cdots, b_i)$$

は provable であり，5·4 は成立する．

故に一般の場合は $\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ を $\neg\mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_i)$，$\mathfrak{B}(a_1, \cdots, a_i) \wedge \mathfrak{C}(a_1, \cdots, a_i) \cdots$ 等 $\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ の一番外の記号によって分類して考えるのであるが，他の場合はいずれも類似または簡単であるから，$\mathfrak{A}(a_1, \cdots, a_i)$ が $\forall x \mathfrak{B}(x, a_1, \cdots, a_i)$ のときのみを考えることにする．

帰納法の仮定により，次の一番上の式は provable である．

$$\cfrac{\cfrac{a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \mathfrak{B}(a, a_1, \cdots, a_i), \Gamma_0 \to \mathfrak{B}(a, b_1, \cdots, b_i)}{a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \forall x \mathfrak{B}(x, a_1, \cdots, a_i), \Gamma_0 \to \mathfrak{B}(a, b_1, \cdots, b_i)}}{a_1 = b_1, \cdots, a_i = b_i, \forall x \mathfrak{B}(x, a_1, \cdots, a_i), \Gamma_0 \to \forall x \mathfrak{B}(x, b_1, \cdots, b_i)}$$

故に 5·4 は成立したわけである．(終)

この 5·4 の特別な場合として Γ_0 から $\forall x \forall y (x = y \vdash (\mathfrak{A}(x) \mapsto \mathfrak{A}(y)))$ は $\mathfrak{A}(x)$ の中の函数，predicate が全部 Γ_0 に含まれているならば provable なわけである．

この formula は $\mathfrak{A}(x)$ の中に自由変数が含まれていないときは公理である

が，そうでないときは公理にならない．公理にするためにはその中にある自由変数を全部この formula の外で $\forall z_1\cdots\forall z_n$ の形に束縛すればよい．すなわち

$$\forall z_1\cdots\forall z_n\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y)))$$

の形にすればよいわけである．ここで $\forall z_1\cdots\forall z_n$ は $\mathfrak{A}(x)$ によって定まるわけである．

上の 5·4 の場合においては $\mathfrak{A}(x)$ の中の函数および predicate は Γ_0 に含まれるとしたのであるが，この制限を除いて，$\forall x(x=x)$ と

$$\forall z_1\cdots\forall z_n\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y)))$$

なる形の公理の全体を equality axioms とよぶことにする．

いま $\forall z_1\cdots\forall z_n\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y)))$ なる形の公理の全体を考えるとき，これはすべての $\mathfrak{A}(x)$ について考えるという意味であるし，$\forall z_1\cdots\forall z_n$ は $\mathfrak{A}(x)$ によって定まるわけであるから，このような公理の全体を簡単のために $\forall\mathfrak{A}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y)))$ と書くことにする．

一般に $\forall\mathfrak{A}\,\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ のような記号法も同様な意味をもつわけである．

この equality axioms すなわち $\forall x(x=x)$, $\forall\mathfrak{A}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y)))$ はいかなる公理系 Γ_0 にも無関係に定まるものである．これを Γ_e と書くことにする．

さて次の定理が成立する．

5·5 Γ_0 が無矛盾で equality axioms を充たしているならば，Γ_e,Γ_0 は無矛盾である．

（証明） いまもし $\forall\mathfrak{A}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y))),\Gamma_0\to$ 　　　に至る三段論法なしの証明図 P があったとすれば，一つの特定な対象を表わす記号 s_0（Γ_0 に含まれなくてもよい）をとったとき，もし P の中に Γ_0 に含まれない函数 $g_1,\cdots,g_n$, predicate $p_1,\cdots,p_m$ があれば，$g_1,\cdots,g_n$ を全部 s_0 に変え，$p_1,\cdots,p_n$ を全部 $s_0=s_0$ に変えて，P からできる図形を P' とすれば，P' は 4·9 および 4·13 によりやはり一つの証明図となる．このとき P' の終式は

$$\forall z^1{}_1\cdots\forall z^1{}_{m1}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}^1(x)\vdash\!\dashv\mathfrak{A}^1(y))),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\forall z^i{}_1\cdots\forall z^i{}_{mi}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}^i(x)\vdash\!\dashv\mathfrak{A}^i(y))),\quad \Gamma_0\rightarrow$$

の形でなければならない．ここで $\mathfrak{A}^j(x)$ の中の函数および predicate は P' の作り方によりすべて Γ_0 に含まれるから，5·4 により

$$\Gamma_0\rightarrow\forall z^j{}_1\ \cdots\forall z^j{}_{mj}\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}^j(x)\vdash\!\dashv\mathfrak{A}^j(y)))$$

は $1\leq j\leq i$ のすべての j について provable である．

故に $\Gamma_0\rightarrow$ 　　　　が provable となり，矛盾する．（終）

この定理の特別な場合として次のものが成立する．

5·6 Γ_e，$\Gamma_a{}^0$ は無矛盾である．

ここにおいて注意すべきことは，この定理は $\Gamma_a{}^0$ と限らず，4·22 の証明の成立するような，$\Gamma_a{}^0$ よりも強い公理系についていつでも成立するわけである．

例えば，さらに $\Gamma_a{}^0$ に a^b すなわちべきについての公理系をつけ加えても，また一般に

$$h(a_1,\cdots,a_n,1)=f(a_1,\cdots,a_n)$$

$$h(a_1,\cdots,a_n,x+1)=g(a_1,\cdots,a_n,h(a_1,\cdots,a_n,x),x)$$

によって，すでに与えられている函数 f,g から作られる h を段々につけ加えて拡大した公理系を考えてもいつでも成立するわけである．すなわち本講座の中で $\Gamma_a{}^0$ と書いて議論するときには，一般にこのように有限の立場の自然数論で定義できる函数全体についての公理を含んでいるものと思ってよい．このような函数 $l(a_1,\cdots,a_i)$ に対して，いつでも有限の立場において

$$a_1=b_1,\cdots,a_i=b_i\rightarrow l(a_1,\cdots a_i)=l(b_1,\cdots,b_i)$$

が充たされていることは，有限の立場の性質上明らかであろう．

§6. LJについて

序論において，有限の立場においてはあいまいな概念を避けるため，否定の意味を変えることによって起きたこととして排中律を頭から主張できないことを述べた．このような立場においての推論は普通の推論より制限された形でな

ければならない．このような推論を分析して，いかなるものであるか形式的に調べることは興味あることである（このような制限された推論はあまり直観的にピンとくるものでないから，このような形式的な法則による形式的推論のほうが早いことが多い．普通の論理では推論は直観的にピンとくるため，LK のような形式的な推論のほうが複雑で遅くなり勝ちなことと好対照である．そのため，この制限された推論の形式化は LK においてのような原理的な進歩のほかに実用的な進歩を合せ含むものである）．

以下において，この制限された論理の Gentzen による美しい形式化 LJ を述べることにする．

LJ は LK を少し変えることによって得られる．すなわち式の概念を次のように変えることによって得られる．

'$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n, \mathfrak{B}$ が formula のとき

$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n \to \mathfrak{B}$$

および
$$\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_n \to$$

を LJ における式という．ここで n がゼロでもよいのは LK の場合と同様である'．

故に LJ において式を $\Gamma \to \Delta$ と書いたとき，Δ は空であるか唯一つの formula からできているものを意味するわけである．本節においては，Δ, Λ, Ψ はすべて空か一つの formula からできているもののみを表わすことにする．

LJ における推論図は，LK における推論図を，その上式と下式とが LJ における式であるように制限したものである．すなわち次のようになる．

LJ における推論図

I） 式の構造についての推論

増　左 $\dfrac{\Gamma \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$　　右 $\dfrac{\Gamma \to}{\Gamma \to \mathfrak{D}}$

減　左 $\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$　　右 ナシ

換 左 $\dfrac{\Gamma, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Pi \to \Delta}{\Gamma, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Pi \to \Delta}$ 右 ナシ

II) 三段論法

$$\frac{\Gamma \to \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Lambda}$$

III) 論理記号についての推論図

7 左 $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{D}}{7\mathfrak{D}, \Gamma \to}$ 右 $\dfrac{\mathfrak{D}, \Gamma \to}{\Gamma \to 7\mathfrak{D}}$

∧ 左（1）$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A} \qquad \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}}$

（2）$\dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$

∨ 左 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta \qquad \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta}$ 右（1）$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{A}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

（2）$\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}$

⊢ 左 $\dfrac{\mathfrak{B}, \Gamma \to \Delta \qquad \Pi \to \mathfrak{A}}{\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}, \Gamma, \Pi \to \Delta}$ 右 $\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \mathfrak{B}}{\Gamma \to \mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B}}$

∀ 左 $\dfrac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \forall x \mathfrak{F}(x)}$

ここに a は下式に入っていないものとする

∃ 左 $\dfrac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta}{\exists x \mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}$ 右 $\dfrac{\Gamma \to \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \exists x \mathfrak{F}(x)}$

ここに a は下式にないものとする

以上が LJ が LK と異なるすべてである．故に LK の証明図の与えられたとき，それが同時に LJ の証明図になっているかどうかは，この証明図を見渡したときその中のすべての式の右辺が高々一個の formula からなるかどうか

をみればよいわけである．

逆に LJ の証明図はすべて LK の証明図になっているわけである．故に次の二つの定理が成立する．

6·1　$\Gamma \to \Delta$ が LJ で provable ならば，$\Gamma \to \Delta$ は LK ではもちろん provable である．

6·2　Γ_0 が LK で無矛盾な公理系であれば，Γ_0 はもちろん LJ で無矛盾である．

また LK の証明図でそのまま LJ の証明図になっているものは少なくない．例えば §2 にあげた証明図の中次のようなものの証明図は LJ の証明図になっている．すなわち次のものは LJ で provable である．

$$\forall x \neg \mathfrak{F}(x) \to \neg \exists x \mathfrak{F}(x)$$

$$\neg \exists x \mathfrak{F}(x) \to \forall x \neg \mathfrak{F}(x)$$

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$$

また，さらに‘$\Gamma \to$　　　　が provable なこと’と‘ある任意の formula $\mathfrak{A}$ について $\Gamma \to \mathfrak{A}$ と $\Gamma \to \neg \mathfrak{A}$ とが共に provable なこと’とが同等なことも LK の場合と全く同じに証明できる．しかし，これに反して次のことが LK との大きな差である．

1)　　　　$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ は一般には provable でない．

2)　$\mathfrak{A} \vdash \mathfrak{B} \to \neg \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ は一般には provable でない．

3)　$\neg(\neg \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \wedge \mathfrak{B}$ は一般には provable でない．

4)　$\neg(\neg \mathfrak{A} \wedge \neg \mathfrak{B}) \to \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ は一般には provable でない．

5)　$\neg \exists x \neg \mathfrak{A}(x) \to \forall x \mathfrak{A}(x)$ は一般には provable でない．

6)　$\neg \forall x \neg \mathfrak{A}(x) \to \exists x \mathfrak{A}(x)$ は一般には provable でない．

7)　$\neg \forall x \mathfrak{A}(x) \to \exists x \neg \mathfrak{A}(x)$ は一般には provable でない．

　　($\exists x \neg \mathfrak{A}(x) \to \neg \forall x \mathfrak{A}(x)$ はこれに反して provable である)

ここに序論の有限の立場において説いた所の一部分が表われているわけである．

また，さらに次の二つの定理は同じ証明のまま LJ でも成立する．

6·3 $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ は LJ で provable な式で，a はこの式の中で指示された場所以外にはないものとする，P を $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ に至る LJ の証明図とし，b を P に含まれない自由変数とすれば P の中にある a を全部 b で代入してできるものを P' とすれば P' もまた LJ の証明図でその終式は $\Gamma(b) \to \Delta(b)$ である．

6·4 $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ が LJ で provable であり，a はここに指定された場所にしかなく t が term ならば $\Gamma(t) \to \Delta(t)$ は LJ で provble である．とくに $\Gamma(a) \to \Delta(a)$ に至る証明図の中に $\forall$ 右と $\exists$ 左とが用いられていなければ，この証明図の中の a を全部 t で変えたものが，$\Gamma(t) \to \Delta(t)$ への証明図になっている．

最後にさらに基本定理が LJ においても成立する．

6·5 式 S が LJ において provable ならば，S は三段論法を用いないでも LJ で provable である．[**LJ の基本定理**：Gentzen]

証明は LK のときの証明をそのままくりかえせばよい．必要に応じて Δ，Λ, ψ を空と考えることによって LK のときの証明がそのまま通用することは，LK のときの証明を眺めてみることによって明らかであろう．

基本定理の応用として次のことを述べておこう．

6·6 $\mathfrak{A}$ が論理記号を含まないとき，　　$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ は LJ で provable でない．

（証明） いま，この式が LJ で provable として，この式に至る LJ の三段論法なしの証明図を P とする．P の最後に用いられた推論図を I とする．I の下式は　　$\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}$ であるから，I は次の形以外に考えられない．

$$(1)\ \frac{\to}{\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}} \qquad (2)\ \frac{\to \mathfrak{A}}{\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}} \qquad (3)\ \frac{\to \neg \mathfrak{A}}{\to \mathfrak{A} \vee \neg \mathfrak{A}}$$

（1）の場合は　　$\to$　　が provable となるからあり得ない．

次に　　$\to \mathfrak{A}$ と　　$\to \neg \mathfrak{A}$ は共に provable でないことをいう．

　　$\to \neg \mathfrak{A}$ のまた上式を考えると，これはまた　　$\to$　　か $\mathfrak{A} \to$　　しか考えられない．故に　　$\to \mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A} \to$　　とが共に

provable でないことをいえばよい．所で式についての次の条件を考えよう．

条件：　式は必ず論理記号を含むかまたは両辺とも空ではない．

始式は両辺とも空でないから，この条件を充たし，三段論法以外の推論図においては上式がこの条件を充たすときは，下式もこの条件を充たすことは明らかである．故に LJ で provable な式はすべてこの条件を充たさねばならない．故に LJ においては　　$\rightarrow \mathfrak{A}$ も $\mathfrak{A} \rightarrow$　　も共に provable ではない．(終)

演 習 問 題

68 ページに述べた 1) のみを本文で証明したが，他の 2)～7) までをこのように証明せよ．

第 2 章　自然数論の無矛盾性の証明

§ 1.　自然数論の公理系

本章において，自然数論の無矛盾性の証明をおこなうが，まず本節においてその公理系について述べることにする.

われわれは序論において，有限の立場においていろいろな有限の立場の自然数についての性質を証明した．それ等を LK の式の形に書けば，

$$\to a=a$$

$$a=b \to b=a$$

$$a=b, b=c \to a=c$$

$$\to a < a+b$$

$$a < b, b < a \to$$

等である．いまこのような式を一般に考えて次のような式を考えよう．

$$A_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, A_n(a_1, \cdots, a_i) \to B_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, B_m(a_1, \cdots, a_i)$$

のような形であって（n, m は 0 でもよい）

1)　$A_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, A_n(a_1, \cdots, a_i), B_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, B_m(a_1, \cdots, a_i)$ の中には有限の立場の自然数論で定義された，特定な対象を表わす記号，函数，predicate と自由変項 $a_1, \cdots, a_i$ しか入っていない（論理記号はない．また各々の $A_j(a_1, \cdots, a_i), B_k(a_1, \cdots, a_i)$ が $a_1, \cdots, a_i$ 全部を含んでいなくてもよい）．だから $a_1, \cdots, a_i$ として有限の立場における具体的な自然数（すなわち $1+1+\cdots+1$ の形の図形）を与えるならば，$A_j(a_1, \cdots, a_i)$ および $B_k(a_1, \cdots, a_i)$ は有限の立場において真偽が定まるわけである.

2)　$a_1, \cdots, a_i$ として有限の立場における具体的な自然数をとるとき $A_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, A_n(a_1, \cdots, a_i)$ の中に必ず偽になるものがあるか，または $B_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, B_m(a_1, \cdots, a_i)$ の中に必ず真になるものがある.

1)，2) の条件を充たす式を**恒等式**という.

いま一つの恒等式 $A_1(a_1,\cdots,a_i),\cdots,A_n(a_1,\cdots,a_i)\to B_1(a_1,\cdots,a_i),\cdots,$ $B_m(a_1,\cdots,a_i)$が与えられたとき $\forall x_1\cdots\forall x_i(A_1(x_1,\cdots,x_i)\wedge\cdots\wedge A_n(x_1,\cdots,$ $x_i)\vdash B_1(x_1,\cdots,x_i)\vee\cdots\vee B_m(x_1,\cdots,x_i))$ なる形の公理をこの恒等式の**母公理**という.

第一章 §4 の Γ_a^0 は恒等式の母公理ばかりからできている式である. 恒等式の母公理の全体を Γ_a と書くことにしよう. 明らかに Γ_a^0 は Γ_a の一部分になっているわけである. そのとき自然数論の公理系とは次の公理系を意味する.

$$\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$$

この最後の公理系は数学的帰納法の公理系とよばれる.

本章の目的は次の定理を証明することにある.

'自然数論は無矛盾である. すなわち

$$\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$$

は LK で無矛盾である'

実はこの自然数論の公理系において Γ_a まで公理系を拡大しても意味なく, Γ_a^0 で十分であることが知られているが, それを証明するのもめんどうであるから Γ_a の立場で証明してゆく. 読者は以下 Γ_a を Γ_a^0 と思って証明を読んでゆかれても差支えない.

さてわれわれは第1章 5·5 の証明と同じ証明によって自然数論の無矛盾性を証明するために, 自然数論の公理系の中 Γ_e と数学的帰納法の公理系の中に入っている函数, predicate が全部 Γ_a の中に入っていると仮定してよい. そう仮定すれば, Γ_e の任意の公理は第1章 5·4 によって Γ_a から provable であるから, われわれは自然数論の無矛盾性をいうためには次の公理系の無矛盾性をいえばよい.

$$\Gamma_a\ \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$$

ここで $\mathfrak{A}(x)$ の中の函数および predicate は全部 Γ_a に含まれるものと制限してよいわけである. さらに,

$$\Gamma_a, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))\to$$

に至る三段論法なしの証明図の中に Γ_a にない特定の対象を表わす記号があれば，それを全部1に変えてもやはり証明図になり，その終式は

$$\Gamma_a, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))\rightarrow$$

の形である．

故に本章においては自然数論の無矛盾を扱う意味においてはそれでよいから，LK の証明図というときは常にその中に含まれる特定の対象を表わす記号，函数，predicate は全部 Γ_a に含まれるものと制限することにする．この制限の上で $\Gamma_a, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$——これを本章では $\tilde{\Gamma}_a$ と書くことにする——の無矛盾性を扱うわけであるが，このままでは多少不便なので，自然数論だけを取扱う新しい論理体系 NN（自然数 natural number の頭文字をとった）を定義する．

NN は LK を次のように二，三の点で修正してできるものである．

1) NN の中に用いる特定の対象を表わす記号，函数，predicate は全部 Γ_a に含まれているものとする（すなわち有限の立場の自然数論で定義できているものとする．これは本章における LK と同じ制限である）．
2) NN における証明図の始式は $\mathfrak{D}\rightarrow\mathfrak{D}$ なる形のほかに任意の‘恒等式’を始式としてよい．
3) NN における推論図は LK における推論図のほかに次の‘帰納法の推論図’とよばれる推論図をつけ加える．

帰納法の推論図

$$\frac{\mathfrak{A}(a),\Gamma\rightarrow\Delta,\mathfrak{A}(a+1)}{\mathfrak{A}(1),\Gamma\rightarrow\Delta,\mathfrak{A}(t)}$$

ここで a は $\mathfrak{A}(1),\Gamma,\Delta$ の中に入っていないものとし，さらに t は任意の term とする（a を含んでいてもよい）．ここで a をこの帰納法の eigenvariable という．

また $\mathfrak{A}(a)$, $\mathfrak{A}(a+1)$, $\mathfrak{A}(1)$, $\mathfrak{A}(t)$ を各々この帰納法の‘左の sub-formula’‘右の sub-formula’,‘左の chief-formula’,‘右の chief-formula’という．

次に LK と NN についての関係を述べることにする．

1·1　$\Gamma \to \Delta$ が NN で provable ならば，$\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma \to \Delta$ が LK で provable である．

（証明）　$\Gamma \to \Delta$ に至る NN の証明図 P をとり，P についての帰納法で証明する．P が $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ なる形の始式であるときは 1·1 は明らかである．また P が恒等式 $\Gamma \to \Delta$ であって，その母公理を A とすれば　$A, \Gamma \to \Delta$ は LK で provable であるからもちろん $\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma \to \Delta$ は provable で 1·1 は成立する．次に P の最後に用いた推論図 I の種類によって分類して証明するが，I が LK の推論図であるときは当然であるから，I が次の形の‘帰納法の推論図’であるとする．

$$\frac{\mathfrak{A}(a), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a+1)}{\mathfrak{A}(1), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)}$$

帰納法の仮定から，次の図の一番上の式は LK で provable である．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}(t) \to \mathfrak{A}(t) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\widetilde{\Gamma}_a, \mathfrak{A}(a), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a+1)}{\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a) \vdash \mathfrak{A}(a+1)}}{\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma_0 \to \Delta_0, \forall y(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1))} \qquad \mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{A}(1)}{\mathfrak{A}(1), \widetilde{\Gamma}_a, \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(1) \wedge \forall y(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1))}}{\mathfrak{A}(1) \wedge \forall y(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1)) \vdash \mathfrak{A}(t), \widetilde{\Gamma}_a, \mathfrak{A}(1), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)}}{\forall x(\mathfrak{A}(1) \wedge \forall y(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1)) \vdash \mathfrak{A}(x)), \widetilde{\Gamma}_a, \mathfrak{A}(1), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)}}{\widetilde{\Gamma}_a, \mathfrak{A}(1), \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)}$$

これによって証明は終った．（終）

1·2　$\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma \to \Delta$ が LK で provable ならば，$\Gamma \to \Delta$ は NN で provable である．

（証明）　$\widetilde{\Gamma}_a, \Gamma \to \Delta$ は LK で provable だからもちろん NN で provable である．故にわれわれは $\widetilde{\Gamma}_a$ の任意の公理 A をとるとき，　　　$\to A$ が NN で provable であることをいえばよい（そうすればあとは三段論法で $\Gamma \to \Delta$ が NN で provable なことがわかる）．

さて，まず A が $A_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, A_n(a_1, \cdots, a_i) \to B_1(a_1, \cdots, a_i), \cdots, B_m(a_1, \cdots, a_i)$ の母公理のときは

$$
\begin{array}{c}
A_1(a_1,\cdots,a_i),\cdots,A_n(a_1,\cdots,a_i) \to B_1(a_1,\cdots,a_i),\cdots,B_m(a_1,\cdots,a_i) \\
\hline
\vee \text{ 右と } \wedge \text{ 左と換と減を何度かおこなって} \\
\hline
A_1(a_1,\cdots,,a_i)\wedge\cdots\wedge A_n(a_1,\cdots,a_i) \to B_1(a_1,\cdots,a_i)\vee\cdots\vee B_m(a_1,\cdots,a_i) \\
\hline
\to A_1(a_1,\cdots,a_i)\wedge\cdots\wedge A_n(a_1,\cdots,a_i) \vdash B_1(a_1,\cdots,a_i)\vee\cdots\vee B_m(a_1,\cdots,a_i) \\
\hline
\forall \text{ 右を } i \text{ 回おこなって} \\
\hline
\to A
\end{array}
$$

故によい．次に‘数学的帰納法の公理’のときは一般の $\mathfrak{A}(x)$ について次の形の式が NN で provable のことをいえばよいであろう．

$$\to \forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$$

ところでこれは次のように証明される．

$$
\begin{array}{c}
\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a) \qquad \mathfrak{A}(a+1)\to\mathfrak{A}(a+1) \\
\hline
\mathfrak{A}(a)\vdash\mathfrak{A}(a+1),\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a+1) \\
\hline
\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1)),\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a+1) \\
\hline
\mathfrak{A}(a),\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\to\mathfrak{A}(a+1) \\
\hline
\mathfrak{A}(1),\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\to\mathfrak{A}(a) \\
\hline
\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\to\mathfrak{A}(a) \\
\hline
\to\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(a) \\
\hline
\to\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))
\end{array}
$$

これによって証明は終った．（終）

1·1, 1·2 の特別な場合として次のことがいえる．

1·3　自然数論の無矛盾性と‘NN において　　$\to$　　が provable でない’こととは同等である．

このことにより本章においては　　$\to$　　が NN において provable でないことを証明することを目的とする．このため NN における二，三の性質を調べることとする．

次の二つは LK の場合と全く同様に証明される．

1·4　$\Gamma(a)\to\Delta(a)$ は NN で provable な式で a はこの式の中で指示された場所以外に含まれないものとする．P を $\Gamma(a)\to\Delta(a)$ に至る NN の証明図とし，b を P に含まれない自由変数とすれば，P の中にある a を全部 b で代入してできるものを P' とすれば P' も NN の証明図でその終式は $\Gamma(b)\to\Delta(b)$ である．

1・5　$\Gamma(a)\to\Delta(a)$ が NN で provable であり，a はこの指示された場所にしかなく t が term ならば，$\Gamma(t)\to\Delta(t)$ は NN で provable である．とくに $\Gamma(a)\to\Delta(a)$ に至る証明図を P，'P の中にある a に t を代入する' ということをLKのときと同じように定義するならば，代入してできたものはやはり証明図であり，その終式は $\Gamma(t)\to\Delta(t)$ である．

われわれは有限の立場で定義された自然数すなわち 1,1+1,1+1+1,… のようなものを考えてみよう．これも NN における term の特別なものと考えられる．したがって '有限の立場で定義された自然数' を NN における term の特別なものと考えたとき，これを**数字**とよぶことにしよう．数字について，次の帰納法の推論図を最後に用いる証明図を考えよう．

1・6

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(a),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(a+1)\end{array}}{\mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(n)}$$

ここで $\vdots$ は $\mathfrak{A}(a),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(a+1)$ に至る証明図を意味する．ここで n が数字であるときは 'この帰納法を分解する' ということを次の証明図を作ることと定義する．

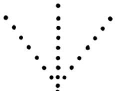
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1+1)\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(1+1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1+1+1)\end{array}}{\mathfrak{A}(1),\Gamma,\Gamma\to\Delta,\Delta,\mathfrak{A}(1+1+1)}}{\mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1+1+1)}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(1+1+1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1+1+1+1)\end{array}}{\cdots\cdots\cdots}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1+1+\cdots+1)\end{array}\qquad\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{A}(1+1+\cdots+1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(n)\end{array}}{\mathfrak{A}(1),\Gamma,\Gamma\to\Delta,\Delta,\mathfrak{A}(n)}}{\mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(n)}$$

ここで ═══ は‘何度か換と減をおこなって’の略であり，また



$$\mathfrak{A}(k),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(k+1)$$

の  は 1·6 の $\mathfrak{A}(a),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(a+1)$ に至る証明図全部の a に k を代入してできる証明図（1·5 により）を意味するわけである．また n が 1 のときは次の証明図を作ることを意味するものとする．

$$\frac{\mathfrak{A}(1)\to\mathfrak{A}(1)}{\mathfrak{A}(1),\Gamma\to\Delta,\mathfrak{A}(1)}$$

今後もこれに類した省略は常におこなうものとする．

1·7　証明図のなぞらい

いま，P,P_0 という次の形の証明図が与えられていて，P の中に $\Pi\to\Lambda$ から $\Gamma\to\Delta$ までの間に用いられている eigenvariable は $\mathfrak{D}$ に含まれていないものとする．



P　$\Pi\to\Lambda$　　　P_0　$\Pi,\mathfrak{D}\to\Lambda$



$\Gamma\to\Delta$

そのとき，‘P_0 から P をなぞらってできる証明図 $\widetilde{P_0}$’を次のように P における式 $\Pi\to\Lambda$ を通る糸の中の $\Pi\to\Lambda$ から $\Gamma\to\Delta$ に至る式の数についての帰納法でその終式が $\Gamma,\mathfrak{D}\to\Delta$ であるように定義する．

1) P の終式が $\Pi\to\Lambda$ であるとき，すなわち $\Pi\to\Lambda$ から $\Gamma\to\Delta$ まで式が一つもなく，$\Gamma\to\Delta$ が $\Pi\to\Lambda$ の自身のとき

　このときは $\widetilde{P_0}$ は P_0 自身とする．

2)　P の最後に用いた推論図を I として，I の上式に至る証明図をなぞらってできる証明図が定義されているとき

I の種類によって分類されるが，他はいずれも類似が簡単のため ∀ 右と三段論法のときのみをおこなう．

I が ∀ 右のとき，次の形とする．

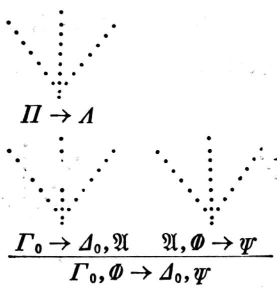
$$\frac{\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a)}{\Gamma \to \Delta_0, \forall x \mathfrak{A}(x)}$$

仮定により，$\Gamma \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a)$ に至る証明図をなぞらってできる証明図 P_1 は定義できていて，その終式は $\Gamma, \mathfrak{D} \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a)$ である．

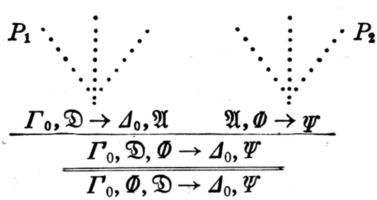
P_1 の後に次の推論図をつけ加えたものを $\widetilde{P}_0$ とすればよい．

$$\frac{\Gamma, \mathfrak{D} \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a)}{\Gamma, \mathfrak{D} \to \Delta_0, \forall x \mathfrak{A}(x)}$$

I が三段論法とする，P および I を次の形とする．



いま，$\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}$ までをなぞらってできる証明図を P_1 とすれば，P_1 の終式は $\Gamma_0, \mathfrak{D} \to \Delta_0, \mathfrak{A}$ である．$\widetilde{P}_0$ として次を作る．



われわれは初めの図で述べたような P, P_0 が与えられたとき，$\widetilde{P}_0$ のことを単に次の図で表わすことがしばしばある．



$$\Pi, \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda$$



$$\Gamma, \mathfrak{D} \rightarrow \Lambda$$

すなわち，$\widetilde{P}_0$ は大まかに考えて，P の $\Pi \rightarrow \Lambda$ と $\Gamma \rightarrow \Delta$ の間の式 $\boldsymbol{\Phi} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$ を $\boldsymbol{\Phi}, \mathfrak{D} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$ で書き改めることによってできると考えられるから，このような粗雑な図で十分直観的に考えることができる．もっとも何かのときに必要とする厳密な証明には定義にもどって証明すべきことはもちろんであるが，多くは簡単のためにそのようなことはしない．

§ 2.　無矛盾性の証明の準備

本節において NN の無矛盾性の証明の準備として，NN の証明図について基本的な概念を定義することにする．

2·1　推論図における formula の親子

推論図 I の上式の formula $\mathfrak{D}_0$ の子とよばれる下式の formula を次のように定義する．

1)　第1章 2·2 にあげられた推論図および本章 § 1 における帰納法の推論図の形において，上式の $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ における i 番目の formula の‘子’は下式における各々 $\Gamma, \Delta, \Pi, \Lambda$ の i 番目の formula を意味する．

2)　三段論法の chief-formula には‘子’の formula はない．

3)　I が換，三段論法，帰納法の推論図でないときは，I の sub-formula の‘子’は I の chief-formula である．

4)　I が帰納法の推論図のとき，I の右の sub-formula の‘子’は I の右の chief-formula であり，I の左の sub-formula の‘子’は I の左の chief-formula である．

5)　I が換の推論図であるとき，第1章 2·2 の推論図の形において，上式

で $\mathfrak{C}$ と書かれる formula の'子'は下式で $\mathfrak{C}$ と書かれた chief-formula であり，上式で $\mathfrak{D}$ と書かれる sub-formula の'子'は下式で $\mathfrak{D}$ と書かれた chief-formula である.

推論図 I の上式のある formula を $\mathfrak{D}_1$, 下式のある formula を $\mathfrak{D}_2$ とするとき，$\mathfrak{D}_1$ が $\mathfrak{D}_2$ の**親**であるとは，$\mathfrak{D}_2$ が $\mathfrak{D}_1$ の子であることをいう.

推論図増の chief-formula は親をもたない. I が増でないときは，$\mathfrak{D}_2$ は一つまたは二つの親をもっているわけである.

2・2　証明図における'血統'

一つの証明図 P が与えられたとき，P の中の始式のある formula またはある増の chief-formula $\mathfrak{D}_1$ から始まって，その子その子と順々にゆけば何度かの後にある三段論法の chief-formula または終式のある formula $\mathfrak{D}_2$ にたどって終りをつげる. このようにして得られる formula の列を一般に P における**血統**，さらに'$\mathfrak{D}_1$ に始まり，$\mathfrak{D}_2$ に終る血統'という. ちょうど糸における式を formula に変えたようなものが血統になっているわけである.

ある始式の中の formula またはある増の chief-formula のことを **beginning formula** といい，ある三段論法の chief-formula または終式の中にある formula のことを **end formula** ということにすれば，ある beginning formula から始まる血統はただ一つに限るわけである. これに反して，ある end formula に至る血統は一般には何個かあっても構わないわけである.

証明図 P の中の二つの formula $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2$ が与えられたとき，$\mathfrak{D}_1$ が $\mathfrak{D}_2$ の**先祖**であるとは $\mathfrak{D}_1$ が $\mathfrak{D}_2$ の前にあるような血統が存在することをいう. すなわち $\mathfrak{D}_1$ からその子その子とたどって $\mathfrak{D}_2$ に至るような場合である.

$\mathfrak{D}_1$ が $\mathfrak{D}_2$ の先祖であるとき，$\mathfrak{D}_2$ を $\mathfrak{D}_1$ の**子孫**ということにする.

2・3　証明図 P のある式 S が P の**終結部に属する**とは，S より下に論理記号についての推論図が用いられていないことをいう.

P のある推論図 I が P の**境界に属する**というのは，I の上式が P の終結部になく，I の下式が P の終結部にあることをいう. I が境界に属するときは I はもちろん論理記号についての推論でなければならない.

2·4　証明図 P は終結部に帰納法を含んでいなく，$\Gamma \to \Delta$ に至る証明図とする．いま，P の終結部から増を取除いてできる $\Gamma^* \to \Delta^*$ に至る証明図 P_0 を次のごとく P の終結部に用いた推論図の数について帰納的に定義する．ここで Γ^*, Δ^* は各々 Γ, Δ からいくつかの formula を取去ってできるものとする．

1)　P の終結部が増を含まなければ，P_0 は P 自身である．

2)　P の最後に用いた推論図 I が右のごとき増であるとき，$\dfrac{\Gamma_0 \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma_0 \to \Delta}$

帰納法の仮定により $\Gamma_0 \to \Delta$ に至る証明図に対しては，P_0' という $\Gamma_0^* \to \Delta^*$ に至る証明図が定義されている．P_0 として P_0' 自身をとればよい．

3)　P の最後に用いた推論図 I が次のごとき三段論法であるとき，

$$\frac{\Pi \to \Lambda, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Phi \to \Psi}{\Pi, \Phi \to \Lambda, \Psi}$$

$\Pi \to \Lambda, \mathfrak{D}$ および $\mathfrak{D}, \Phi \to \Psi$ に至る証明図を各々 P', P'' としよう．帰納法の仮定により，P_0', P_0'' は定義できている．次のように場合を分けて定義する．

イ)　P_0' の終式が $\Pi^* \to \Lambda^*$ の形のとき　P_0 として P_0' 自身をとる．

ロ)　上の場合でなくて，P_0'' の終式が $\Phi^* \to \Psi^*$ の形のとき　P_0 として P_0'' 自身をとる．

ハ)　P_0' の終式が $\Pi^* \to \Lambda^*, \mathfrak{D}$ の形で P_0'' の終式が $\mathfrak{D}, \Phi^* \to \Psi^*$ のとき P_0', P_0'' の最後に次の推論図をつけ加えて P_0 を作る．

$$\frac{\Pi^* \to \Lambda^*, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Phi^* \to \Psi^*}{\Pi^*, \Phi^* \to \Lambda^*, \Psi^*}$$

4)　P の最後に用いた推論図 I が右のごとき減であるとき，$\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma_0 \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma_0 \to \Delta}$

$\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma_0 \to \Delta$ に至る証明図 P' に対しては帰納法の仮定により P_0' が定義されている．次のような場合を分類して定義する．

イ)　P_0' の終式が $\mathfrak{D}, \Gamma_0^* \to \Delta^*$ または $\Gamma_0^* \to \Delta^*$ であるとき　P_0 として P_0' 自身をとる．

ロ)　P_0' の終式が $\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma_0^* \to \Delta^*$ であるとき　P_0 は P_0' の最後に次の

推論図をつけ加えたものとする.

$$\frac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma_0{}^* \to \Delta^*}{\mathfrak{D}, \Gamma_0{}^* \to \Delta^*}$$

5) P の最後に用いた推論図 I が次のごとき換であるとき

$$\frac{\Pi, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Phi \to \Delta}{\Pi, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Phi \to \Delta}$$

$\Pi, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Phi \to \Delta$ に至る証明図 P' に対しては帰納法の仮定により P_0' が定義されている. 次のように場合を分類して定義する.

イ) P_0' の終式が $\Pi^*, \Phi^* \to \Delta^*$ か $\Pi^*, \mathfrak{C}, \Phi^* \to \Delta^*$ か $\Pi^*, \mathfrak{D}, \Phi^* \to \Delta^*$ かの形であるとき　P_0 として P_0' 自身をとる.

ロ) P_0' の終式が $\Pi^*, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Phi^* \to \Delta^*$ の形であるとき　P_0 として P_0' の最後に次の推論図をつけ加えたものをとる.

$$\frac{\Pi^*, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \Phi^* \to \Delta^*}{\Pi^*, \mathfrak{D}, \mathfrak{C}, \Phi^* \to \Delta^*}$$

2·5　t を NN における自由変数を含まない term とする. t は1と有限の立場で定義されたいくつかの函数とを組合せてできている. 故に t を計算して t に等しい数字 n を求めることができる. すなわち有限の立場で $t=n$ になる数字 n を求めることができるわけである. このとき任意の formula $\mathfrak{F}(a)$ について, 次の二つの式は NN で三段論法, 帰納法についての推論図を用いずに provable である.

1)　$\mathfrak{F}(t) \to \mathfrak{F}(n)$

2)　$\mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{F}(t)$

(証明)　$\mathfrak{F}(t)$ についての帰納法で証明しよう.

i)　$\mathfrak{F}(t)$ が $p(T_1(t), \cdots, T_k(t))$ のときは, p および T_i の中の函数はすべて有限の立場で定義されているから明らかに, 次の二つの式は恒等式である. 故に明らか.

$$p(T_1(t), \cdots, T_k(t)) \to p(T_1(n), \cdots, T_k(n))$$
$$p(T_1(n), \cdots, T_k(n)) \to p(T_1(t), \cdots, T_k(t))$$

ii)　$\mathfrak{F}(t)$ に論理記号が入っているとき, このときは $\mathfrak{F}(t)$ の一番外の記号

によって，場合を分けるのであるが，いずれも類似または簡単のため，$\mathfrak{F}(t)$ が $\forall x\mathfrak{G}(x,t)$ の場合のみを取扱うことにする．帰納法の仮定により，次の二つの式は三段論法および帰納法の推論図なしに NN で provable である．

$$\mathfrak{G}(a,t) \to \mathfrak{G}(a,n)$$
$$\mathfrak{G}(a,n) \to \mathfrak{G}(a,t)$$

故に求むるものは明らかである．(終)

2·6　t が自由変数をもたない NN の term であって数字ではないものとする．t を計算して得られる数字を n とするとき，NN の証明図の中の次の帰納法の推論図

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a+1)\end{array}}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}$$

を分解してできたものを下図によって定義する．

$$\cfrac{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(1+1)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(1+1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(1+1+1)\end{array}}{\dfrac{\mathfrak{F}(1), \Gamma, \Gamma \to \Delta, \Delta, \mathfrak{F}(1+1+1)}{\quad}}\qquad}{\cfrac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(n)\end{array} \qquad \begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{F}(t)\end{array}}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}}$$

ここで $\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(n)$ までの証明図は，

$$\frac{\begin{array}{c}\vdots\\ \mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a+1)\end{array}}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(n)}$$

を分解してできたものであり，また $\mathfrak{F}(n)\to\mathfrak{F}(t)$ に至る証明図は2·5によって与えられた，三段論法と帰納法の推論図を含まぬ証明図である．

§3. NN の無矛盾性の証明

本節においていよいよ NN の無矛盾性の証明をすることにする．

われわれは NN の証明図で　　$\to$　　に至るものが目前に与えられたとすれば矛盾することをいう．故に本節においては，考えられる NN の証明図は，すべて　　$\to$　　に至るものとする．そしてこのような証明図に最初の ε 数までの超限順序数を対応させ，その超限順序数についての超限帰納法で証明する．故に，超限順序数を対応させることから考えてゆこう．

3·1 formula の degree とは第1章 §3 と同様にこの formula の中に含まれる論理記号の数をいうものとする．三段論法および帰納法の推論図 I の dgree とは I の chief-formula の degree をいうものとする．

NN の証明図 P の中の式 S の**高さ**とは，S より下にある P の三段論法または帰納法の推論図の degree の最大と定義する．

明らかに P の終式の高さはゼロである．

3·2　　$\to$　　に至る NN の証明図 P の式 S に，S までに用いられた推論図の数によって次のごとく帰納的に順序数を対応させる．

1) S が始式のとき，S の順序数は1である．

2) S がある推論図 I の下式であるとき：

'I が式の構造についての推論図であるとき' は S の順序数は，I の上式の順序数に等しいと定義する．

'I が $\wedge$ 右，$\vee$ 左，$\vdash$ 左以外の論理記号についての推論図であるとき' は S の順序数は I の上式の順序数に1を加えたものとする．

'I が $\wedge$ 右，$\vee$ 左，$\vdash$ 左のいずれかであるとき' は S の順序数は，I の二つの上式の順序数を α,β とするとき，$\alpha+\beta$ とする．

'I が三段論法のとき' は S の順序数は

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\alpha+\beta}}}}\right\}\rho-\sigma$$

とする．ここで α,β は I の二つの上式の順序数であり，ρ は I の上式の高さ，σ は S の高さとする．故に I の上式と下式との高さが変らないときは，$\alpha+\beta$ になるわけである．

'I が帰納法のとき' は S の順序数は

$$\left.\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\beta_1+1}}}}}\right\}\rho-\sigma$$

である，ここで β_1 は S の上式の順序数 α を標準形に書いたときに

$$\alpha=\omega^{\beta_1}+\cdots+\omega^{\beta_n}$$

によって定まる順序数である．また，さらに ρ は I の上式の高さ，σ は S の高さを表わすものとする．

証明図 P の**順序数**とは，P の終式の順序数を意味するものとする．

以下において，NN における　　→　　に至る証明図 P があって，P の中に論理記号または帰納法についての推論図または $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の形の始式があるならば，P より小さい順序数をもった NN の　　→　　に至る証明図 P_0 の存在することを証明する．このことが証明されれば超限帰納法により，　　→　　に至る NN の証明図があれば，帰納法の推論図も，論理記号についての推論図も用いずに　　→　　が NN で provable なことがわかるわけである．このことを P のいろいろな場合に分類して証明しよう．

1)　P の終結部に eigenvariable 以外の自由変数を含んでいるとき：

この場合は，P の終結部に例えば a という eigenvariable 以外の自由変数があれば，P の中の a に全部 1 を代入してしまう．ここに a に 1 を代入するというのは，1·5 における代入と同じ意味で，P に適当な eigenvariable の

変数変換をしたあとでするものを意味する．このような１の代入を繰返せば P の終結部の eigenvariable 以外の自由変数を全部なくすることができる．そうしてできたものを P_0 とすれば，明らかに P と P_0 との順序数は等しい．故に P として終結部に eigenvariable 以外の自由変数を含まない場合だけを証明すればよい．

2)　P の終結部が eigenvariable 以外の自由変数を含まず，一つの帰納法の推論図 I を含んでいるとき：

このとき I が帰納法の推論図の中で一番下にあって（I の下にはもはやないという意味）次の形をしているものとしてよい．

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
I\ \dfrac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a+1)}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}
\begin{array}{l}\text{高さ } \rho \\ \text{高さ } \sigma\end{array} \\
\vdots
\end{array}
$$

ここで I の下には帰納法についての推論図がないから，t は自由変数を一つも含んでいないとしてよい．このときは，2·6 に述べられた，帰納法の推論の分解を用いれば，次のごとくとなる．

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \end{array} \\
\text{高さ } \rho\ \ \dfrac{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(1+1) \qquad \mathfrak{F}(1+1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(1+1+1)}{} \\
\begin{array}{cc} \vdots & \vdots \end{array} \\
\text{高さ } \rho\ \ \dfrac{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(n) \qquad \mathfrak{F}(n) \to \mathfrak{F}(t)}{\mathfrak{F}(1), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}
\begin{array}{l}\text{高さ } \rho \\ \text{高さ } \sigma\end{array} \\
\vdots
\end{array}
$$

ここで I の上式の順序数を標準形に書いて

$$\omega^{\beta_1}+\omega^{\beta_2}+\cdots+\omega^{\beta_k}$$

とすれば，I の下式の順序数は

$$\left.\begin{array}{l}\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\beta_1+1}}}}}\end{array}\right\}\rho-\sigma \text{ 個}$$

であり，また分解された証明図の $\mathfrak{F}(1), \Gamma\to\Delta, \mathfrak{F}(t)$ の順序数は

$$\left.\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\omega^{\omega^{\beta_1}\cdot(n-1)+\omega^{\beta_2}\cdot(n-1)+\cdots+\omega^{\beta_k}\cdot(n-1)+m}}}}}\right\}\rho-\sigma \text{ 個}$$

である．ここに m は $\mathfrak{F}(n)\to\mathfrak{F}(t)$ の順序数で，この式までには三段論法も，帰納法の推論図も用いられていないので明らかに $m<\omega$ である．故に明らかに分解してできた証明図のほうが P の順序数より小さい．故に証明された．

帰納法の推論図がなければ，終結部には eigenvariable はないから上の二つでない場合は自由変数と帰納法の推論図が終結部にないときを考えればよい．

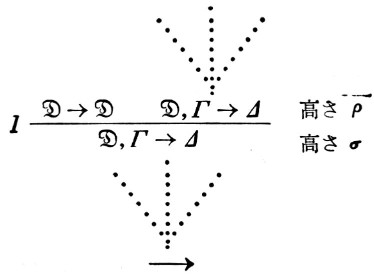
3)　P の終結部が自由変数も帰納法の推論図も含まないが，増を含んでいるとき：

このとき P から 2·4 に述べたように増を取除けば，それによってできる証明図 P_0 は明らかに，終結部に，自由変数も帰納法と増の推論図も含んでいないで　　$\to$　　に至る NN も証明図である．しかも P_0 の順序数は P の順序数より大きくはない．故にさらに増も含まない場合について証明すればよいことがわかった．

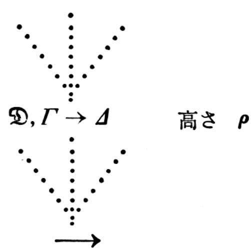
4)　P の終結部が自由変数，帰納法および増の推論図を含まないが，$\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の形の始式を含んでいるとき：

この $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ を上式とする推論図 I を考えるとき，I は三段論法以外にはあり得ない（減，換は $\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ の両辺が 1 つの formula しか含まないので適用できない）．

故に I は P の中に次の形で入っていると考えてよい.



このとき図のごとく I の上式の高さを ρ, I の下式の高さを σ とすれば, 実は $\rho=\sigma$ となっている. 何となれば ρ は max($\mathfrak{D}$ の degree, σ)に等しいが, I の下式も $\mathfrak{D}$ を含む故, I の下式から P の終式 $\to$ に至るまでには必ず $\mathfrak{D}$ を chief-formula とする三段論法がなければならない. 故に $\sigma \geq$ ($\mathfrak{D}$ の degree) が成立するわけである. 故に, いま I の上式の順序数を α とすれば I の下式の順序数は $\alpha+1$ となる.
いま, P から I を除いて



と変形したものを P_0 とすれば, P_0 の $\mathfrak{D}, \Gamma \to \varDelta$ の所の順序数は α で P における I の下式の順序数は $\alpha+1$ であるから, P_0 の順序数のほうが P の順序数より小さくなる. 故に証明された.

5) P の終結部が自由変数, 帰納法および増の推論図および $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ の形の始式を含んでいないとき :

この場合が一番本質的である. P に論理記号についての推論図がなければ P 全体が P の終結部になっている故, 証明は終っているとしてよい. 故に, P に

論理記号についての推論図を少なくとも一つ含むものとしてよい．すなわち P には境界に属する推論図が少なくとも一つあるものとしてよい．まず，次の定義をしよう．

P の境界の推論図の chief-formula およびその子孫を P の**要素**という．これについての簡単な性質として

3·3 P の終結部の式 S が論理記号を含むならば，S が要素を含むか，S の上に P の要素を含む式 S_1 が必ず存在する．

（証明） S は P の終結部にあって論理記号を含む．S からその上へと S を通る任意の糸を逆にたどってゆけば，この条件が初めて充たされない式 S_0 がある．S_0 を上式とする推論図を I とすれば，I の下式は P の終結部にあって論理記号を含み，S_0 はそうではない．I は減　換，三段論法ではあり得ない．故に I は論理記号についての推論図でなければならない．すなわち I の下式は要素を含む．故に 3·3 は明らかである．（終）

次の補題を証明しよう．

3·4 P の終結部に三段論法 I で I の二つの chief-formula が共に P の要素であるものが存在する．

（証明） いま P の終結部の式 S についての次の条件を考えよう．

条件： S に P の要素が存在する．

P の境界に属する任意の推論図の下式はこの条件を充たす．また P の終式はこの条件を充たさない．故に P の推論図 I で I の上式にはこの条件を充たすものがあり，I の下式がこの条件を充たさないもので一番上のものが存在する（すなわち I の上の推論図はもはやこのようなことはないもの）．この I は換，減であり得ないから I は三段論法でなければならない．いま，この I が求める性質を充たすことをいおう．I を次の形としよう．

$$I \ \frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D} \qquad \mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda}$$

いま，I の左の上式が P の要素を含むものとすれば，I の取り方から I の下式が P の要素を含まない．すなわち，$\Gamma \to \Delta, \mathfrak{D}$ において $\mathfrak{D}$ が P の要素

になるわけである．であるから $\mathfrak{D}$ は論理記号を含むことは明らかである．故に I の右の上式は論理記号を含む（もし右の上式が P の要素を含まないとすれば I の取り方に反するから）．$\mathfrak{D}, \Pi \to \Lambda$ において $\mathfrak{D}$ が P の要素でなければならない．故に I が求める性質を充たすことがわかった．（終）

以上により 3·4 の条件を充たす I が P の 終結部にあることがわかった，この I を一つ固定して考えよう．以下 I の chief-formula $\mathfrak{D}$ の一番外の論理記号の種類によって分類して考えるのであるが，他の場合は簡単または類似である故，一番外の記号が $\wedge$ または $\forall$ のときのみを考えることにする．

（1） $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\wedge$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}$ とし，P, I 等を次の形としてよい．

$$I_1\ \frac{\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A} \qquad \Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{B}}{\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}} \qquad\qquad I_2\ \frac{\mathfrak{A}, \Pi_0 \to \Lambda_0}{\mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}, \Pi_0 \to \Lambda_0}$$

$$I\ \frac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B} \qquad\qquad \mathfrak{A}\wedge\mathfrak{B}, \Pi \to \Lambda}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda} \qquad \text{高さ}\ \rho$$

$$\Phi \to \Psi \qquad\qquad \text{高さ}\ \sigma < \rho$$

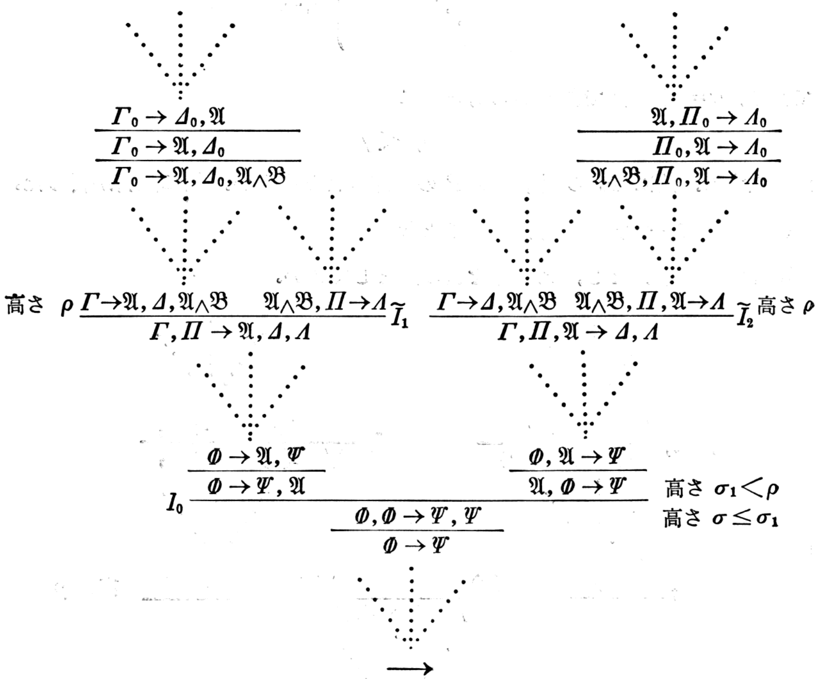
$$\longrightarrow$$

ここで I は 3·4 の条件を充たす三段論法であり，I_1, I_2 は各々境界に属し，その chief-formula は各々 I の左，右の chief-formula の祖先になっているものである．I の上式の高さを ρ とし $\Phi \to \Psi$ は I より下で ρ より高さが小さくなっている最初の式とする．すなわち $\Phi \to \Psi$ の上式は高さが ρ のわ

けである．$\Phi \rightarrow \Psi$ は $\Gamma, \Pi \rightarrow \Delta, \Lambda$ 自身でもあり得るし，また $\rightarrow$ 自身でもあり得るわけである．

さらに I の左の上式の順序数を α，右の上式の順序数を β とし，さらに $\Phi \rightarrow \Psi$ の順序数を γ としよう．γ は明らかに ω^{δ} の形である．

このとき，次によって表わされる証明図を考える．



$\tilde{I}_1$ の左の上式の順序数を α_1，右の上式の順序数を β_1 とし，$\tilde{I}_2$ の左の上式の順序数を α_2，右の上式の順序数を β_2 としよう．

明らかに

$$\alpha_1 < \alpha \qquad \beta_1 = \beta$$
$$\alpha_2 = \alpha \qquad \beta_2 < \beta$$

が成立する．

故に I_0 の左の上式の順序数を γ_1，I_0 の右の上式の順序数を γ_2，I_0 の下式の順序数を γ_0 とすれば

$$\left.\begin{matrix} & & \gamma_1 \\ & \omega^{} & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \sigma & & \end{matrix}\right\}\sigma_1-\sigma<\gamma \qquad \left.\begin{matrix} & & \gamma_2 \\ & \omega^{} & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \omega & & \end{matrix}\right\}\sigma_1-\sigma<\gamma$$

が成立する。

$$\left.\begin{matrix} & & \gamma_1+\gamma_2 \\ & \omega^{} & \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \gamma_0=\omega & & \end{matrix}\right\}\sigma_1-\sigma$$

であり，$\gamma=\omega^{\delta}$ の形であるから明らかに

$$\gamma_0<\gamma$$

が成立する。故に P_0 の順序数は P の順序数より小さい。故に証明が終った。

（2） $\mathfrak{D}$ の一番外の記号が $\forall$ のとき

$\mathfrak{D}$ を $\forall x\mathfrak{A}(x)$ とし，P, I 等を次の形としてよい。

$$I_1\ \frac{\Gamma_0\to\Delta_0,\mathfrak{A}(a)}{\Gamma_0\to\Delta_0,\forall x\mathfrak{A}(x)} \qquad I_2\ \frac{\mathfrak{A}(t)\Pi_0\to\Lambda_0}{\forall x\mathfrak{A}(x),\Pi_0\to\Lambda_0}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$I\ \frac{\Gamma\to\Delta,\forall x\mathfrak{A}(x) \qquad \forall x\mathfrak{A}(x),\Pi\to\Lambda}{\Gamma,\Pi\to\Delta,\Lambda} \quad \text{高さ } \rho$$

$$\vdots$$

$$\Phi\to\Psi \qquad \text{高さ } \sigma<\rho$$

$$\vdots$$

$$\longrightarrow$$

I_1, I_2, ρ, $\Phi\to\Psi$ 等はすべて $\wedge$ の場合と同じである。

さらに t の中に自由変数が入っていれば適当な eigenvariable の変換のあ

とに1を代入すればよいから，t の中に自由変数がないものとしてよい．

このとき次によって表わされる証明図を考えよう．

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)}}{\Gamma_0 \to \mathfrak{A}(t), \Delta_0}}{\Gamma_0 \to \mathfrak{A}(t), \Delta_0, \forall x \mathfrak{A}(x)}
\atop \vdots}{\Gamma \to \mathfrak{A}(t), \Delta, \forall x\mathfrak{A}(x)}
\quad
\dfrac{\vdots}{\forall x\mathfrak{A}(x), \Pi \to \Lambda}
}{\Gamma, \Pi \to \mathfrak{A}(t), \Delta, \Lambda}
\atop \vdots}{\dfrac{\Phi \to \mathfrak{A}(t), \Psi}{\Phi \to \Psi, \mathfrak{A}(t)}}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\vdots}{\Gamma \to \Delta, \forall x\mathfrak{A}(x)}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathfrak{A}(t), \Pi_0 \to \Lambda_0}}{\Pi_0, \mathfrak{A}(t) \to \Lambda_0}}{\forall x\mathfrak{A}(x), \Pi_0, \mathfrak{A}(t) \to \Lambda_0} \atop \vdots}{\forall x\mathfrak{A}(x), \Pi, \mathfrak{A}(t) \to \Lambda}
}{\Gamma, \Pi, \mathfrak{A}(t) \to \Delta, \Lambda}
\atop \vdots}{\dfrac{\Phi, \mathfrak{A}(t) \to \Psi}{\mathfrak{A}(t), \Phi \to \Psi}}
}{\dfrac{\Phi, \Phi \to \Psi, \Psi}{\dfrac{\Phi \to \Psi}{\dfrac{\vdots}{\to}}}}
$$

ここに $\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(t)$ に至る証明図は $\Gamma_0 \to \Delta_0, \mathfrak{A}(a)$ に至る証明図に適当な eigenvariable の変数変換のあとで a に t を代入してできたものである．すべてが前の場合と同様にして P_0 の順序数は P の順序数より小さいことがわかる．以上によってすべての場合が終った．

これまでもし矛盾に至る証明図が存在すれば，$\mathfrak{D}\to\mathfrak{D}$ なる始式をもたず論理記号，帰納法の推論図を用いない証明図で矛盾に至るものがあることがわかった．すなわち恒等式から始まって，式の構造についての推論および三段論法だけで矛盾に至る証明図 P が存在することがわかった．

故に NN の無矛盾性をいうためには，かかる証明図 P が存在しないことをいえばよい．P の中に自由変数があれば全部1を代入すればよいから，自由変数はないものとしてよい．故に有限の立場で正しい formula に ＋，正しくない formula に － をつけることにすれば，P の始式は次の条件を充たす．

式の左辺に － の formula があるか，右辺に ＋ の formula がある．ところで式の構造についての推論図によっては，上式のこの性質は下式に伝わる．また，三段論法の二つの上式がこの性質を充たすときに，chief-formula が ＋ であるとしても － であるとしても，やはり下式もこの性質を充たすことが明らかであろう． 故に P のすべての式がこの性質を充たさなければならない．

ところで，P の終式はこの性質を充たさない． これは矛盾である． よって NN の無矛盾性の証明が終った．

以上の証明において，最後に有限の立場における真偽によって ＋，－ をつける所で，有限の立場の真偽ということに問題を転化することに多少の不満をもつ人もあるかも知れない．これについては少しばかり注意をすることが必要であろう．

いま，われわれは漠然と有限の立場に定義される函数および predicate 全体を考えたのであるが，これを $*_1+*_2$，$*_1\times *_2$，$*_1-*_2$，$*_1/*_2$，$*_1<*_2$，$*_1=*_2$ 等何個かに制限したらどうであろう．そのようなもののみからできる論理記号を含まず自由変数を含まない formula に＋，－ を帰納的にきちんと定義することは格別むずかしくはないであろう．また記号をこれらに限ったときには，それについて必要な恒等式も有限個であって，それについて左辺に － が右辺に ＋ があることの証明も真偽というような言葉を用いることなしに有限の立場で証明することができるであろう．

すなわち，有限の立場における真偽は実は言葉の上だけの簡略法と考えても

よいわけである．しかしいま，われわれの述べた NN という自然数論のあいまいな形式化においては，このような漠然とした表現もある程度止むを得ないであろう．しかし実は上に述べたものだけに函数や predicate を制限しても次節につけ加える Min の概念を導入しておけば，他の函数や predicate はすべて表現できることが知られている．故にわれわれは原則としては以上のようなあいまいさを避けることができるわけである．しかし，これは不必要に長く煩わしくなるのでここでは省略した．

§ 4. Min の添加

前節までに，LK において

$$\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$$

が無矛盾であることを知った．いまさらにある命題を充たす最小の自然数なる概念を導入してその公理を添加してもなお無矛盾であることを証明しよう．

いま，‘$\mathfrak{A}(x)$ を充たす自然数 x の最小’という概念を **Min**$(x)\mathfrak{A}(x)$ と書くことにすれば，これは formula $\mathfrak{A}(a)$ から term Min$(x)\mathfrak{A}(x)$ を作ったことになり，いままでの函数，preditcate，その他の概念にはなかったものである．故に本節においては LK の term および formula の構成において次の一項をつけ加えることにする．

4·1 $\mathfrak{A}(a)$ が formula で x が $\mathfrak{A}(a)$ に入っていない束縛変数のときは，Min$(x)\mathfrak{A}(x)$ は term である．

このようにするとき，LKが非常に拡張されてしまう．例えば $\forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$ という公理を考えてもいままでと異なって $\mathfrak{A}(x)$ の中に Min がいくら入っていてもよいのであるから，前節までに考えていたものよりはるかに広いと考えられるわけである．

前節までに考えたもの，すなわち Min を含まない $\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$ を Γ_0 とする．さらに Min$(x)\mathfrak{A}(x)$ という形にしてもこの $\mathfrak{A}(x)$ の中にもまた Min がいくらでも入ってよいわけである．このようなことは十分注意されねばならない．いま，このように拡張した

LK の中で次の公理系 $\tilde{\Gamma}_0$ が無矛盾であることをいおう.

$$\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z) \leq x)$$

ここで $a \leq b$ は $a < b \vee a = b$ の略と考える. $\tilde{\Gamma}_0$ の中の Γ_e と Γ_0 の中の Γ_e とは同じ記号で書いているけれども, 前者は Min が入ってもよいし, 後者は Min は入っていないことに注意すべきである.

次に $\mathfrak{A}(a)$ が formula のとき, この中に入っていない束縛変数の一つを x とするとき $\{x\}\mathfrak{A}(x)$ なる形を考え, '変数をもった formula' という.

F を $\{x\}\mathfrak{A}(x)$ とし t を term とするとき $F(t)$ は $\mathfrak{A}(t)$ を意味するものとする.

この約束のもとに, 次の重要な '* づけ' の操作を定義する.

t が term のとき t^* は変数をもった formula であり, $\mathfrak{A}$ が formula であるとき, $\mathfrak{A}^*$ が formula であるように次のように定義する.

1) t が自由変数または対象を表わす記号であるときは t^* は $\{x\}(x=t)$ を表わす.

2) t が $f(t_1, \cdots, t_i)$ の形のときは, t^* は $\{x\}(\forall x_1 \cdots \forall x_i(t_1^*(x_1) \wedge \cdots \wedge t_i^*(x_i) \vdash x = f(x_1, \cdots, x_i)))$ を表わす.

3) t が $\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)$ のときは t^* は

$$\{x\}(\forall z(\mathfrak{A}^*(z) \vdash \mathfrak{A}^*(x) \wedge x \leq z) \wedge (\neg \exists z \mathfrak{A}^*(z) \vdash x = 1))$$

を意味する. ここに $\mathfrak{A}^*(a)$ は $(\mathfrak{A}(a))^*$ を意味する.

4) $\mathfrak{A}$ が $p(t_1, \cdots, t_k)$ のときは $\mathfrak{A}^*$ は

$$\forall x_1 \cdots \forall x_k(t_1^*(x_1) \wedge \cdots \wedge t_k^*(x_k) \vdash p(x_1, \cdots, x_k))$$

を表わす.

5) $\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B} \wedge \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ であるときは, $\mathfrak{A}^*$ は各々 $\neg\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{B}^* \wedge \mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{B}^* \vee \mathfrak{C}^*$, $\mathfrak{B}^* \vdash \mathfrak{C}^*$ を表わす.

6) $\mathfrak{A}$ が $\forall x\mathfrak{B}(x)$ または $\exists x\mathfrak{B}(x)$ であれば, $\mathfrak{A}^*$ は各々 $\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ または $\exists x\mathfrak{B}^*(x)$ を表わす.

この定義のもとに次のいくつかの定理が成立する.

4·2　t が term のときは次の二つの式は provable である.

$$\Gamma_0, t^*(a), t^*(b) \to a=b$$

$$\Gamma_0 \to \exists x t^*(x)$$

(証明) t についての帰納法で証明しよう. t が自由変数または対象を表わす記号のときは明らかである. t が $f(t_1,\cdots,t_i)$ のときは $t^*(a)$ は

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(t_1^*(x_1)\wedge\cdots\wedge t_i^*(x_i)\vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$

であり, 帰納法の仮定により $t_j^*(a)$ を充たす a は唯一つ存在することが Γ_0 の下で provable であるから t についても明らかである.

次に t が $\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z)$ のときを考えよう. このときは $t^*(a)$ は

$$\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(a)\wedge a\leq z)\wedge(\neg\exists z\mathfrak{A}^*(z)\vdash a=1)$$

Γ_0 の中には Min を含まないものの数学的帰納法の公理が入っているから, この場合には題意は容易に直接証明される. (終)

4・3 $\mathfrak{A}(t)$ が term t を含んだ formula, $T(t)$ が term t を含んだ term とするとき, 次の二つの式は provable である.

$$\Gamma_0 \to (\mathfrak{A}(t))^* \dashv\vdash \forall x(t^*(x)\vdash\mathfrak{A}^*(x))$$

$$\Gamma_0 \to (T(t))^*(a) \dashv\vdash \forall x(t^*(x)\vdash(T(x)^*(a)))$$

(証明) $\mathfrak{A}(t), T(t)$ についての帰納法で証明する. まず

i) $T(t)$ が t 自身のとき: $(T(x))^*$ は x^*, 故に $(T(x))^*(a)$ は $a=x$. 故に $\Gamma_0\to t^*(a) \dashv\vdash \forall x(t^*(x)\vdash a=x)$ をいえばよいがこれは明らか.

ii) $T(t)$ が $f(T_1(t),\cdots,T_i(t))$ のとき: $(T(t))^*(a)$ は定義により次のことを表わす.

$$\forall x_1\cdots\forall x_i((T_1(t))^*(x_1)\wedge\cdots\wedge(T_i(t))^*(x_i))\vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$

これは帰納法の仮定により Γ_0 の下で次の式と同等である.

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(\forall x(t^*(x)\vdash(T_1(x))^*(x_1))\wedge\cdots\wedge\forall x(t^*(x)\vdash(T_i(x))^*(x_i)) \\ \vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$

これは 4・2 により Γ_0 の下で次の式と同等である.

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(\exists x(t^*(x)\wedge(T_1(x))^*(x_1))\wedge\cdots \\ \cdots\wedge\exists x(t^*(x)\wedge(T_i(x))^*(x_i))\vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$

これは明らかに順々に次の式と同等である.

$$\forall x \forall x_1 \cdots \forall x_i (t^*(x) \wedge (T_1(x))^*(x_1) \wedge \cdots \wedge (T_i(x))^*(x_i)$$
$$\vdash a = f(x_1, \cdots, x_i))$$
$$\forall x (t^*(x) \vdash \forall x_1 \cdots \forall x_i ((T_1(x))^*(x_1) \wedge \cdots \wedge (T_i(x))^*(x_i)$$
$$\vdash a = f(x_1, \cdots, x_i))$$
$$\forall x (t^*(x) \vdash (T(x))^*(a))$$

よってこの場合はいえた.

iii) $T(t)$ が $\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z,t)$ のとき: $(T(t))^*(a)$ は定義により

$$\forall z ((\mathfrak{A}(z,t))^* \vdash (\mathfrak{A}(a,t))^* \wedge a \leq z) \wedge (\urcorner \exists z (\mathfrak{A}(z,t))^* \vdash a = 1)$$

である. これは帰納法の仮定により Γ_0 の下で次の formula と同等である.

$$\forall z (\forall x (t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(z,x)) \vdash \forall x (t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(a,x)) \wedge a \leq z)$$
$$\wedge (\urcorner \exists z \forall x (t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(z,x)) \vdash a = 1)$$

これは 4·2 により Γ_0 の下で次の formula と同等である.

$$\forall z (\exists x (t^*(x) \wedge \mathfrak{A}^*(z,x)) \vdash \forall x (t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(a,x)) \wedge a \leq z)$$
$$\wedge (\urcorner \exists z \exists x (t^*(x) \wedge \mathfrak{A}^*(z,x)) \vdash a = 1)$$

これは次の formula に同等である.

$$\forall x (t^*(x) \vdash \forall z (\mathfrak{A}^*(z,x) \vdash \mathfrak{A}^*(a,x) \wedge a \leq z))$$
$$\wedge \exists x (t^*(x) \wedge (\urcorner \exists z \mathfrak{A}^*(z,x) \vdash a = 1))$$

これはさらに 4·2 により Γ_0 の下で次の formula に同等である.

$$\forall x (t^*(x) \vdash \forall z (\mathfrak{A}^*(z,x) \vdash \mathfrak{A}^*(a,x) \wedge a \leq z))$$
$$\wedge \forall x (t^*(x) \vdash (\urcorner \exists z \mathfrak{A}^*(z,x) \vdash a = 1))$$

これは以下順々に次の formula に同等である.

$$\forall x (t^*(x) \vdash \forall z (\mathfrak{A}^*(z,x) \vdash \mathfrak{A}^*(a,x) \wedge a \leq z) \wedge (\urcorner \exists z \mathfrak{A}^*(z,x) \vdash a = 1))$$
$$\forall x (t^*(x) \vdash (T(x))^*(a))$$

iv) $\mathfrak{A}(t)$ が $p(T_1(t), \cdots, T_i(t))$ であるとき: $(\mathfrak{A}(t))^*$ は定義により

$$\forall x_1 \cdots \forall x_i ((T_1(t))^*(x_1) \wedge \cdots \wedge (T_i(t))^*(x_i) \vdash p(x_1, \cdots, x_i))$$

である. これは Γ_0 の下で上の二つの場合と同じように順々に次の formula と同等である.

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(\forall x(t^*(x)\vdash(T_1(x))^*(x_1))\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge\forall x(t^*(x)\vdash(T_i(x))^*(x_i))\vdash p(x_1,\cdots,x_i))$$
$$\forall x_1\cdots\forall x_i(\exists x(t^*(x)\wedge(T_1(x))^*(x_1))\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge\exists x(t^*(x)\wedge(T_i(x))^*(x_i))\vdash p(x_1,\cdots,x_i))$$
$$\forall x(t^*(x)\vdash\forall x_1\cdots\forall x_i((T_1(x))^*(x_1)\wedge\cdots$$
$$\cdots\wedge(T_i(x))^*(x_i)\vdash p(x_1,\cdots,x_i)))$$
$$\forall x(t^*(x)\vdash\mathfrak{A}^*(x))$$

v) $\mathfrak{A}(t)$ が $\neg\mathfrak{B}(t)$ のとき： $(\mathfrak{A}(t))^*$ は Γ_0 の下で次の formula に順々に同等である．

$$\neg(\mathfrak{B}(t))^*$$
$$\neg\forall x(t^*(x)\vdash\mathfrak{B}^*(x))$$
$$\neg\exists x(t^*(x)\wedge\mathfrak{B}^*(x))$$
$$\forall x(t^*(x)\vdash\neg\mathfrak{B}^*(x))$$

vi) $\mathfrak{A}(t)$ が $\mathfrak{B}(t)\wedge\mathfrak{C}(t)$ または $\forall z\mathfrak{B}(z,t)$ のとき： 帰納法の仮定より明らかである．

以上ですべての場合に証明が終った．（終）

4・4 $\mathfrak{A},t$ が各々 formula および term で Min を含まないならば，次の二つの式は provable である．

$$\Gamma_0\rightarrow\mathfrak{A}^*\leftrightarrow\mathfrak{A}$$
$$\Gamma_0\rightarrow t^*(a)\leftrightarrow a=t$$

（証明） まず t について帰納的に証明する．t が自由変数または対象を表わす記号のときは明らかであるから，t が $f(t_1,\cdots,t_i)$ のときのみをやればよい．$t^*(a)$ は順を追って次の formula と Γ_0 の下で同等である．

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(t_1^*(x_1)\wedge\cdots\wedge t_i^*(x_i)\vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$
$$\forall x_1\cdots\forall x_i(x_1=t_1\wedge\cdots\wedge x_i=t_i\vdash a=f(x_1,\cdots,x_i))$$
$$a=f(t_1,\cdots,t_i)$$
$$a=t$$

次に $\mathfrak{A}$ の場合を $\mathfrak{A}$ についての帰納法でおこなおう．

i）$\mathfrak{A}$ が $p(t_1,\cdots,t_i)$ のとき：　$\mathfrak{A}^*$ は順を追って次の formula と Γ_0 の下で同等である.

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(t_1{}^*(x_1)\wedge\cdots\wedge t_i{}^*(x_i)\vdash p(x_1,\cdots,x_i))$$

$$\forall x_1\cdots\forall x_i(x_1=t_1\wedge\cdots\wedge x_i=t_i\vdash p(x_1,\cdots,x_i))$$

$$p(t_1,\cdots,t_i)$$

ii）$\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$, $\forall x\mathfrak{B}(x)$ のとき：　帰納法の仮定より明らかである.（終）

4・5　次の二つの式は provable である.

1)　　$\Gamma_0\rightarrow(\forall x\forall y(x=y\vdash(\mathfrak{A}(x)\mapsto\mathfrak{A}(y))))^*$

2)　　$\Gamma_0\rightarrow(\forall x(\mathfrak{A}(x)\vdash\mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z))\wedge\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)\leq x))^*$

（証明）　まず 1）のほうは

$$\Gamma_0,(a=b)^*\rightarrow\mathfrak{A}^*(a)\mapsto\mathfrak{A}^*(b)$$

のみをいえばよいが，これは 4・4 により明らかである.

次に，2）のほうは次の式の provable のみをいえばよい.

$$\Gamma_0,\mathfrak{A}^*(a)\rightarrow(\mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)))^*\wedge(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)\leq a)^*$$

このためには 4・3 により次の式がいえればよい.

$$\Gamma_0,\mathfrak{A}^*(a)\rightarrow\forall x((\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z))^*(x)\vdash\mathfrak{A}^*(x))$$
$$\wedge\forall x((\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))^*(x)\vdash x\leq a)$$

ところで $(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z))^*(x)$ は $\forall z(\mathfrak{A}^*(z)\vdash\mathfrak{A}^*(x)\wedge x\leq z)\wedge(\neg\exists z\mathfrak{A}^*(z)\vdash x=0)$ であるから，この式は Γ_0 に含まれている数学的帰納法の公理を用いて明らかである.（終）

4・6　$\Gamma\rightarrow\Delta$ が provable ならば次の式は provable である.

$$\Gamma_0,\Gamma^*\rightarrow\Delta^*$$

ここで $\Gamma\rightarrow\Delta$ が $\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_n\rightarrow\mathfrak{B}_1,\cdots,\mathfrak{B}_m$ のとき $\Gamma^*\rightarrow\Delta^*$ は $\mathfrak{A}_1{}^*,\cdots,\mathfrak{A}_n{}^*\rightarrow\mathfrak{B}_1{}^*,\cdots,\mathfrak{B}_m{}^*$ を表わす.

（証明）　$\Gamma\rightarrow\Delta$ に至る証明図 P についての帰納法によって証明する.

まず $\Gamma\rightarrow\Delta$ が始式のときは明らかであるから，P の最後に用いた推論図 I の種類によって分類して証明するのであるが他の場合はいずれも簡単のため I

が次の形の ∀ 左であるものとする.

$$\frac{\mathfrak{A}(t), \Gamma_1 \to \varDelta}{\forall x \mathfrak{A}(x), \Gamma_1 \to \varDelta}$$

帰納法の仮定により $\Gamma_0, (\mathfrak{A}(t))^*, \Gamma_1{}^* \to \varDelta^*$ の provable はわかっている. すなわち, 4·3 により $\Gamma_0, \forall x(t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(x)), \Gamma_1{}^* \to \varDelta^*$ は provable である. ところで一般に $\forall x \mathfrak{A}^*(x) \to \forall x(t^*(x) \vdash \mathfrak{A}^*(x))$ は provable であるから, 三段論法により, 求める式 $\Gamma_0, \forall x \mathfrak{A}^*(x), \Gamma_1{}^* \to \varDelta^*$ が provable であることを知る. (終)

4·7 $\tilde{\Gamma}_0$ は無矛盾である.

(証明) $\tilde{\Gamma}_0 \to$ 　　　　が provable であるとすれば, 4·6 により $\Gamma_0, \tilde{\Gamma}_0{}^*$ $\to$ 　　　　が provable である. 故に $\tilde{\Gamma}_0$ の無矛盾をいうためには $\tilde{\Gamma}_0$ の任意の公理 $\mathfrak{A}$ をとるとき, $\Gamma_0 \to \mathfrak{A}^*$ を証明すればよい. これは 4·4, 4·5 により明らかである. (終)

以上によってわれわれは $\Gamma_a, \Gamma_e, \forall \mathfrak{A} \forall x(\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z) \leq x)$ の無矛盾性を得た. しかし以上において Γ_a のかわりに $\Gamma_a{}^0$ で証明すれば十分なことが知られている. Γ_a の中に用いられる他の函数, predicate およびそれについての公理は, すべて Min と $\Gamma_a{}^0$ の中に用いられるものとによって組合せて作ることができる. であるから自然数論において有限の立場の真偽に還元することが不満足ならば, 必要なだけの函数について有限の立場の真偽を用いることなく証明して, しかる後 Min をつけ加え, その後で必要な函数その他を Min を用いて表わすようにすればよいであろう.

その他そのことについてはもっと系統的におこなう方法があるが, ここまでに述べてきただけのことを以てはそれらについては説明することはできない.

演 習 問 題

1) $\tilde{\Gamma}_0$ の公理系から $\forall \mathfrak{A} \forall x(\mathfrak{A}(1) \wedge \forall y(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1)) \vdash \mathfrak{A}(x))$ が provable であることを証せ. ここに $\mathfrak{A}(x)$ の中に Min が入っていても構わない.

2) $\tilde{\Gamma}_0$ のもとでは $\exists x \mathfrak{A}(x)$ と $\mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(x)\mathfrak{A}(x))$ とは同等である.

(この意味で Min を用いれば, ∀ とか ∃ とかを取除くことができる)

§ 5. 実数論への一つの展望

現在，数学基礎論の中心問題は実数論の無矛盾性を証明することにある．この無矛盾性を証明すべき実数論はいろいろに形式化することができよう．例えば，解析学の初めに述べるように大小四則の公理に，上限，下限の存在を要請する公理をつけ加えるならばこれで実数論の公理系ができあがるであろう．

また実数論といっても，実数が表面に表われていなくても，その中で実数論が構成できればよいわけであるから，有理数の公理にそれについての集合の公理系をつけ加えたものを考えてもよいであろう．もちろんそれについての集合の公理系といってもその中で古典的な Dedekind の切断が実行できるものでなければならないが，しかしこのような形にしてその無矛盾性を考えるとき，いままで述べてきたこととあまり密接な関係が見られないであろう．

本節において，いままで述べてきた所と最も関連の深い形でその中に実数論が構成できる体系を考えよう．

まず LK を拡張するのであるが，われわれは以下考える体系に Min は入っていないものとする（すなわち LK を第1章におけるものと考える）．このように考えた上で LK に‘任意の函数 f’という概念をつけ加える．すなわち，まず記号として，

5・1　函数の自由変数：　$f, g, h, \cdots$

5・2　函数の束縛変数：　$\boldsymbol{f}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{h}, \cdots$

なる記号を入れ，term の構成には，

5・3　t が term で f が函数の自由変数ならば，$f(t)$ もまた term である．

をつけ加える．formula の構成には

5・4　$\boldsymbol{f}$ を函数についての束縛変数とし，この $\boldsymbol{f}$ を含まない一つの formula と一つの函数についての自由変数 f をとるとき，この formula の中の f を $\boldsymbol{f}$ に変え，その前に $\forall \boldsymbol{f}$ または $\exists \boldsymbol{f}$ をつけ加えたものは formula である．とくに $\mathfrak{F}(f)$ が formula で $\boldsymbol{f}$ がこの中に含まれないときは，$\forall \boldsymbol{f} \mathfrak{F}(\boldsymbol{f})$ および $\exists \boldsymbol{f} \mathfrak{F}(\boldsymbol{f})$ は formula である．

次に函数についての $\forall$ と $\exists$ の推論図について説明する前に，次の定義をなそう．

5·5 functional.

$T(a)$ が term とする．このときこの中の a を x に変えその前に $\{x\}$ をつけたもの，すなわち $\{x\}T(x)$ を **functional** という．

5·6 functional の函数への代入

f は函数の自由変数で，$\{x\}T(x)$ は f を含まない functional とするとき，term t の中の全部の f に $\{x\}T(x)$ を代入してできる term t^0 を，次のように帰納的に定義する．

1) t が f を含まなければ，t^0 は t 自身である．

2) t が $f(t_1)$ の形ならば，t^0 は $T(t_1{}^0)$ である．ここに $t_1{}^0$ は t_1 の中の f に $\{x\}T(x)$ を代入してできたものである．

3) t が $g(t_1,\cdots,t_k)$ で g が f でないならば，t^0 は $g(t_1{}^0,\cdots,t_k{}^0)$ である．ここに $t_1{}^0,\cdots,t_k{}^0$ は各々 $t_1,\cdots,t_k$ の中の f に $\{x\}T(x)$ を代入してできたものである．

いま，さらに formula $\mathfrak{A}$ の中の全部の f に $\{x\}T(x)$ を代入してできる formula $\mathfrak{A}_0$ を次のように帰納的に定義する．

1) $\mathfrak{A}$ が f を含まないならば，$\mathfrak{A}_0$ は $\mathfrak{A}$ 自身である．

2) $\mathfrak{A}$ が $p(t_1,\cdots,t_n)$ の形ならば，$\mathfrak{A}_0$ は $p(t_1{}^0\ \cdots,t_k{}^0)$ の形である．ここに $t_1{}^0,\cdots,t_k{}^0$ は各々 $t_1,\cdots,t_k$ の中の f に $\{x\}T(x)$ を代入してできた term である．

3) $\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}, \mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}, \mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$ であるならば，$\mathfrak{A}_0$ は各々 $\neg\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0\wedge\mathfrak{D}_0, \mathfrak{B}_0\vee\mathfrak{C}_0, \mathfrak{B}_0\vdash\mathfrak{C}_0$ である．ここに $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{C}_0$ は各々 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ の中の f を全部 $\{x\}\,T(x)$ でかえてできる formula である．

4) $\mathfrak{A}$ が $\forall x\mathfrak{B}(x)$, $\exists x\mathfrak{B}(x)$ ならば, $\mathfrak{A}_0$ は各々 $\forall x\mathfrak{B}_0(x)$, $\exists x\mathfrak{B}_0(x)$ である．ここで $\mathfrak{B}_0(a)$ は $\mathfrak{B}(a)$ の中の f を全部 $\{x\}\,T(x)$ でかえてできる formula である．

5) $\mathfrak{A}$ が $\forall \boldsymbol{g}\mathfrak{B}(\boldsymbol{g})$, $\exists \boldsymbol{g}\mathfrak{B}(\boldsymbol{g})$ ならば, $\mathfrak{A}_0$ は各々 $\forall \boldsymbol{g}\mathfrak{B}_0(\boldsymbol{g})$, $\exists \boldsymbol{g}\mathfrak{B}_0(\boldsymbol{g})$ であ

る．ここで $\mathfrak{B}_0(g)$ は $\mathfrak{B}(g)$ の中の f を全部 $\{x\}T(x)$ でかえてできる formula である．

以上の定義によって，われわれは $\{x\}T(x)$ という functional と $\mathfrak{F}(f)$ という formula が与えられたときは $\mathfrak{F}(\{x\}T(x))$ という formula を与えることができるわけである．これ等の準備の下で，本節において必要な LK の拡張は以上のほかに，LK に次の推論図をつけ加えることによってできる．

5·7　函数についての推論図

$\forall$ 左
$$\frac{\mathfrak{F}(\{x\}T(x)),\Gamma\to\Delta}{\forall \boldsymbol{f}\mathfrak{F}(\boldsymbol{f}),\Gamma\to\Delta}$$
ここに $\{x\}T(x)$ は任意の functional である．

右
$$\frac{\Gamma\to\Delta,\mathfrak{F}(f)}{\Gamma\to\Delta,\forall \boldsymbol{f}\mathfrak{F}(\boldsymbol{f})}$$
ここに f は下式に含まれていないとする．

$\exists$ 左
$$\frac{\mathfrak{F}(f),\Gamma\to\Delta}{\exists \boldsymbol{f}\mathfrak{F}(\boldsymbol{f}),\Gamma\to\Delta}$$
ここに f は下式に含まれていないとする．

右
$$\frac{\Gamma\to\Delta,\mathfrak{F}(\{x\}T(x))}{\Gamma\to\Delta,\exists \boldsymbol{f}\mathfrak{F}(\boldsymbol{f})}$$
ここに $\{x\}T(x)$ は任意の functional である．

このように LK を拡張したとき，たいせつなことは次の二つのことである．

1）Gentzen の基本定理が，このように拡張した体系においても第1章 §3 の証明をそのままいまの場合にいいなおすことによって証明できる．

2）$\Gamma_a, \Gamma_e, \forall\mathfrak{A}\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$ の無矛盾性の §3 の証明が，このように拡張した体系においてもそのまま，いまの場合にいいなおすことによって証明できる．

読者は試みに，一つ一つ当って調べていただきたい．

いま，このように拡張された体系において，§4 の Min が添加できるならば，どうなるであろうか．

すなわち，このように LK を拡張した体系において，前節の $\tilde{\Gamma}_0$ の無矛盾がいえたとすれば，次の一番上の式は provable である．

$$\frac{\dfrac{\tilde{\Gamma}_0\to\mathfrak{A}(a)\ \vdash\!\dashv\ \mathrm{Min}(z)((\mathfrak{A}(a)\vdash z=1)\wedge(\neg\mathfrak{A}(a)\vdash z=2))=1}{\tilde{\Gamma}_0\to\forall x(\mathfrak{A}(x)\ \vdash\!\dashv\ \mathrm{Min}(z)((\mathfrak{A}(x)\vdash z=1)\wedge(\neg\mathfrak{A}(x)\vdash z=2))=1)}}{\tilde{\Gamma}_0\to\exists \boldsymbol{f}\forall x(\mathfrak{A}(x)\ \vdash\!\dashv\ \boldsymbol{f}(x)=1)}$$

ここで $f(a)=1$ のことを $a\epsilon f$ と書くことにすれば

$$\tilde{\Gamma}_0 \to \exists \boldsymbol{f} \forall x(\mathfrak{A}(x) \mapsto x\epsilon \boldsymbol{f})$$

すなわち，$\tilde{\Gamma}_0$ の下で函数についての変数を用いることによって，自然数についての集合の理論が構成されることになる．故に解析学の初歩に多少の知識を有する人ならば，$\tilde{\Gamma}_0$ の下で実数論が構成されることは明らかであろう．すなわち，本節の立場で考えれば，実数論の無矛盾性の問題は，このように LK を拡張した体系において Min の添加をなすことと思ってよい．

事実，前節の方法はそのままではいまの体系では通用しない．それは，どこがだめなためであろうか．また，何かうまい具合に多少の変更をすることによって，Min の添加それによっての実数論の無矛盾性が得られないであろうか．

これ等のことについて，読者の研究を望みたい．このことが，直接に実数論の無矛盾性という興味深い問題，ひいては数学基礎論の面白さへ読者を誘うよい刺戟となることと信ずるからである．

それから，ここでは全く述べなかったが，任意の命題というような命題についての変数を導入すれば，どのようになるであろうか．また，函数の函数，命題の命題，函数の命題，‥‥等についてはどうであろうか．また，集合の理論および集合論はどのように展開されるのであろうか．

このようなことを考えて，現代数学をもう一度見なおしてみることは，興味深くもあり，また，それはたいせつなことと思うのである．

第3章　自然数論の無矛盾性: Gödel の考察

自然数論の無矛盾性に関して，Gentzen が ε_0（最初の ε 数）までの超限帰納法をその証明の基礎としているのに対し，Gödel は，まず，自然数論を直観主義的自然数論に飜訳し，後にそれを媒介として，primitive recursiue functional というものを基礎に証明を与えた．本章ではその方法を説明する．

§1.　自然数論の，直観主義的自然数論（HA）への飜訳

1·1　NN の変更

本章の議論を簡単にするため，NN を多少変更し，算術的公理，すなわち $\mathfrak{D}\rightarrow\mathfrak{D}$ 以外の始式，をもう少し整理する．すなわち，対象記号は 0，函数記号は ′，＋，・，predicate は＝，に限定し，算術的公理としては次の形の始式のみを認める：

$$
\begin{aligned}
&\rightarrow s=s,\\
s=t&\rightarrow t=s,\\
r=s, s=t&\rightarrow r=t,\\
s=t&\rightarrow s'=t',\\
s'=t'&\rightarrow s=t,\\
0=s'&\rightarrow,\\
&\rightarrow s+0=s,\\
&\rightarrow s+t'=(s+t)',\\
&\rightarrow s\cdot 0=0,\\
&\rightarrow s\cdot t'=s\cdot t+s.
\end{aligned}
$$

これからわかるように，本章では1でなく0が最小の自然数であり，$a+1$ は a' によってあらわされる．言い換えれば，′ は1をたすこと，または‘次の数’をあらわす．

帰納法の推論は

$$\frac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(s)}$$

の形とする．ここで a は下式に入っていないとし，s は任意の term とする．第2章では，a が s に入っていてよいことにしたが，どちらでも体系全体としては同等になるので，都合上今のように制限しておく．

このように変更したNNは，第2章の意味の有限的な立場で認められた函数や predicate についての理論を展開するに十分である．このことは第2章の§4. によるのだが，詳細は省略する．以下本章ではこの変更された体系をNN とよぶ．したがって特に論理記号をもたない NN の formula といえば，$s=t$ の形のみである．

LK または LJ の formula について，次のような表現が一般に使われている：論理記号をもたない formula を atomic という．∀および∃を quantifier といい，quantifier をもたない formula を quantifier-free である，という．式 $S: \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_n$ の各々を，式 S の formula とよぶ．以下にあらわれる種々な体系の formula について，これらの表現を適用する．

1・2　体系 HA

自然数論の一つの形式化である NN は，古典的自然数論 (Peano arithmetic の形式化）ともよばれる．それは直観主義的自然数論 (Heyting arithmetic) というものと対比させるためであり，形式的には後者は（大ざっぱにいえば）NN の公理を LJ に加えたものである．この体系を仮りに HA とよぶ．

HA は，NN から，各式に‘右辺の formula のうち quantifier をもつものは高々一個である’または‘右辺の式の formula で quantifier-free でないものは高々一個である’という制限をつけて得られる．推論その他は，各式が上記の条件をみたしている限りNNと全く同じである．始式はすべて quantifier-free な formula から成るとする．

定義から明らかなように，HA は NN の部分体系である．すなわち，HA の式は NN の式であり，HA の推論は NN の推論であり，したがって HA で

provable な式は NN で provable である．また quantifier-free な formula のみから成る式は NN でも HAでも同じであるから，たとえば，quantifier-free な $\mathfrak{A}$ については，$\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ や $\mathfrak{A}\mapsto\neg\neg\mathfrak{A}$ などが HA-provable である．

なお，本章では，HA は形式的体系としてのみ提示し，直観主義的算術の説明などは行なわない．

1·3 formula の飜訳

NN の任意の formula $\mathfrak{A}$ に別な formula $\mathfrak{A}^*$ を対応させる規則を与えよう．$\mathfrak{A}^*$ も NN の formula であり，$\mathfrak{A}$ の飜訳とよぶ．$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}^*$ は内容的には同値，ゆえに真偽値を共にするものである．

1) $\mathfrak{A}$ が quantifier-free ならば，$\mathfrak{A}^*$ は $\mathfrak{A}$ 自身．

2) $\mathfrak{B}^*$ および $\mathfrak{C}^*$ がすでに定義されているとき，$(\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C})^*$, $(\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C})^*$, $(\neg\mathfrak{B})^*$, $(\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C})^*$ は各々 $\mathfrak{B}^*\wedge\mathfrak{C}^*$, $\neg(\neg\mathfrak{B}^*\wedge\neg\mathfrak{C}^*)$, $\neg\mathfrak{B}^*$, $\neg(\mathfrak{B}^*\wedge\neg\mathfrak{C}^*)$.

3) $(\mathfrak{B}(a))^*$ がすでに定義されているとき，$(\forall x\mathfrak{B}(x))^*$ および $(\exists x\mathfrak{B}(x))^*$ は各々 $\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ および $\neg\forall x\neg\mathfrak{B}^*(x)$，ただし $\mathfrak{B}^*(x)$ は $(\mathfrak{B}(a))^*$ から a を x で置き換えて得られる．

定義から明らかなように，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}^*$ は同じ自由変数および束縛変数を含む．

1·4 NN の任意の formula $\mathfrak{A}$ について，$\mathfrak{A}\mapsto\mathfrak{A}^*$ が NN で provable である．しかもそれは LK の推論のみを使って provable である．もし $\mathfrak{A}$ が quantifier-free ならば，$\mathfrak{A}\mapsto\mathfrak{A}^*$ は HA で provable である．$\mathfrak{A}^*\mapsto\neg\neg\mathfrak{A}^*$ は任意の $\mathfrak{A}$ について HA で provable である．

最後の命題は $\mathfrak{A}$ の degree（論理記号の数）についての帰納法で証明される．たとえば $\mathfrak{A}$ が $\exists x\mathfrak{B}(x)$ の形で，$(\mathfrak{B}(a))^*\mapsto\neg\neg(\mathfrak{B}(a))^*$ がすでに provable とわかっているとする．$(\forall x\mathfrak{B}(x))^*$ は $\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ である．$\neg\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)\to\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ が問題である．これは次のように証明される．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{B}^*(a)\to\mathfrak{B}^*(a)}{\forall x\mathfrak{B}^*(x)\to\mathfrak{B}^*(a)}}{\neg\mathfrak{B}^*(a)\to\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)}}{\neg\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)\to\neg\neg\mathfrak{B}^*(a)} \qquad \dfrac{\vdots}{\neg\neg\mathfrak{B}^*(a)\to\mathfrak{B}^*(a)}}{\dfrac{\neg\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)\to\mathfrak{B}^*(a)}{\neg\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)\to\forall x\mathfrak{B}^*(x)}}$$

ここで二重線はいくつかの推論の適用を一括して書いたことを示す．$\mathfrak{A}$ が $\exists x\mathfrak{B}(x)$ のときは $\mathfrak{A}^*$ は $\neg\forall x\neg\mathfrak{B}^*(x)$ であり，　　$\neg\neg\neg\forall x\neg\mathfrak{B}^*(x)\to\neg\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ の証明図を作ればよいが，任意の formula $\mathfrak{C}$ について $\neg\neg\neg\mathfrak{C}\to\neg\mathfrak{C}$ が HA で provable である：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{C}\to\mathfrak{C}}{\neg\mathfrak{C},\ \mathfrak{C}\to}}{\mathfrak{C}\to\neg\neg\mathfrak{C}}}{\neg\neg\neg\mathfrak{C},\ \mathfrak{C}\to}}{\neg\neg\neg\mathfrak{C}\to\neg\mathfrak{C}} \quad .$$

ゆえに $\mathfrak{C}$ を $\forall x\mathfrak{B}^*(x)$ とすればよい．

他の場合も同様に証明される．

1·5　式の翻訳

$S:\mathfrak{A}_1,\mathfrak{A}_2,\cdots,\mathfrak{A}_m\to\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\cdots,\mathfrak{B}_n$ を NN の式とし，その翻訳 S^* および中間的翻訳 S' を定義する．S^* も S' も HA の式である．簡単のため，$\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2,\cdots,\mathfrak{B}_l$ が quantifier-free, $\mathfrak{B}_{l+1},\cdots,\mathfrak{B}_n$ が quantifier を含む，とする．S^* は

$$\mathfrak{A}_1{}^*,\mathfrak{A}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{A}_m{}^*\to\mathfrak{B}_1{}^*,\mathfrak{B}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{B}_l{}^*,\neg(\neg\mathfrak{B}_{l+1}{}^*\wedge\cdots\wedge\neg\mathfrak{B}_n{}^*),$$

S' は

$$\mathfrak{A}_1{}^*,\mathfrak{A}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{A}_m{}^*,\neg\mathfrak{B}_{l+1}{}^*,\cdots,\neg\mathfrak{B}_n{}^*\to\mathfrak{B}_1{}^*,\mathfrak{B}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{B}_l{}^*$$

と定義される．1·4 により quantifier-free な $\mathfrak{B}$ については $\mathfrak{B}$ 　 $\mathfrak{B}^*$ が HA で provable であるから，$\mathfrak{B}_1{}^*,\mathfrak{B}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{B}_l{}^*$ を $\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\cdots,\mathfrak{B}_l$ で置き換えても HA で同等な式が得られる．すなわち HA で S^* が provable なことと，$\mathfrak{A}_1{}^*,\mathfrak{A}_2{}^*,\cdots,\mathfrak{A}_m{}^*\to\mathfrak{B}_1,\mathfrak{B}_2,\cdots,\mathfrak{B}_l,\neg(\neg\mathfrak{B}_{l+1}{}^*\wedge\cdots\wedge\neg\mathfrak{B}_n{}^*)$ が provable なこととは同時である．S' についても同様である．

1·6　NN で S が provable なことと S' が provable なこととは同時であ

る．すなわち S が NN で provable ならば S' も NN で provable であり，逆も真である．また，HA で S' が provable なことと S^* が provable なこととは同時である．

1·7　式 S が NN で provable ならば，S' は HA で provable である．

いまこれを仮定すると，1·6 により，次の結論が得られる．

1·8　NN の式 S について，S が NN で provable なことと，S^* が HA で provable なことは同時である．

この命題は，NN の定理（provable な formula）の飜訳が HA で provable なことを示し，その意味で，本質的には NN が HA の部分体系をなす．HA は NN の部分体系であるから，これらの事実を総合して，NN と HA は同じ強さである，という．特に式　$\rightarrow$　の飜訳はそれ自身であるから，1·8 の対偶をとり，$\rightarrow$　が HA で provable でないならば NN でも provable でない．すなわち，われわれは，

1·9　HA が無矛盾ならば NN も無矛盾，言い換えれば NN の無矛盾性が HA の無矛盾性に帰着させられる［Gödel］ことを証明した．

1·10　以下 1·7 の命題を証明する．S が NN で provable であるとして，その NN における証明図にあらわれる推論の個数に関する帰納法による．以後このようなときには，単に証明図の複雑さに関する帰納法ということにしよう．

始式については命題は明らかであるから，最後の推論 I の種類によって場合を分ける．

1)　I が帰納法：$\dfrac{\mathfrak{F}(a), \Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{F}(a')}{\mathfrak{F}(0), \Gamma \rightarrow \Delta, \mathfrak{F}(s)}$ で，$\mathfrak{F}(a)$ が quantifier をもつ場合．帰納法の仮定により

$$(1)\qquad \mathfrak{F}^*(a), \Gamma^*, \neg\Delta_1{}^*, \neg\mathfrak{F}^*(a') \rightarrow \Delta_2{}^*$$

が HA で provable，ただし $\mathfrak{F}^*(a)$ は $(\mathfrak{F}(a))^*$ の略，Δ が $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_n$ ならば，$\neg\Delta_1{}^*$ は $\neg\mathfrak{B}_{l+1}{}^*, \cdots, \neg\mathfrak{B}_n{}^*$，$\Delta_2{}^*$ は $\mathfrak{B}_1{}^*, \cdots, \mathfrak{B}_l{}^*$ をあらわし，Γ が $\mathfrak{A}_1, \cdots, \mathfrak{A}_m$ ならば Γ^* は $\mathfrak{A}_1{}^*, \cdots, \mathfrak{A}_m{}^*$ をあらわす．また

$$(2)\qquad \neg\neg\mathfrak{F}^*(a') \rightarrow \mathfrak{F}^*(a')$$

は，1·4 により HA で provable. ゆえに次の証明図は HA のものである：

$$
\dfrac{\dfrac{(1)}{\mathfrak{F}^*(a), \Gamma^*, \neg\Delta_1^* \to \Delta_2^*, \neg\neg\mathfrak{F}^*(a')} \qquad (2)}{\dfrac{\mathfrak{F}^*(a), \Gamma^*, \neg\Delta_1^* \to \Delta_2^*, \mathfrak{F}^*(a')}{\dfrac{\mathfrak{F}^*(0), \Gamma^*, \neg\Delta_1^* \to \Delta_2^*, \mathfrak{F}^*(s)}{\mathfrak{F}^*(0), \Gamma^*, \neg\Delta_1^*, \neg\mathfrak{F}^*(s) \to \Delta_2^*}}}
$$

2) I が三段論法：

$$
\frac{\Gamma \to \Delta,\ \mathfrak{D} \quad \mathfrak{D},\ \Pi \to \Lambda}{\Gamma,\ \Pi \to \Delta,\ \Lambda}
$$

で，$\mathfrak{D}$ が quantifer を含む場合．Δ は quantifier-free のことに注意．帰納法の仮定を使って，

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\mathfrak{D}^*, \Pi^*, \neg\Lambda_1^* \to \Lambda_2^*}}{\Pi^*, \neg\Lambda_1^* \to \Lambda_2^*, \neg\mathfrak{D}^*} \qquad \dfrac{\vdots}{\neg\mathfrak{D}^*, \Gamma^* \to \Delta^*}}{\Gamma^*, \Pi^*, \neg\Lambda_1^* \to \Delta^*, \Lambda_2^*}\ .
$$

3) I が $\vee$ 右：

$$
\frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}
$$

で，$\mathfrak{A}$ が quantifier をもつ場合．Θ は quantifier-free である．$(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})^*$ は $\neg(\neg\mathfrak{A}^*\wedge\neg\mathfrak{B}^*)$ であるから，

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\neg\mathfrak{A}^*,\ \Gamma^* \to \Theta^*}}{\neg\mathfrak{A}^*\wedge\neg\mathfrak{B}^*,\ \Gamma^* \to \Theta^*}}{\Gamma^* \to \Theta^*,\ \neg(\neg\mathfrak{A}^*\wedge\neg\mathfrak{B}^*)}}{\Gamma^*,\ \neg\neg(\neg\mathfrak{A}^*\wedge\neg\mathfrak{B}^*) \to \Theta^*}\ .
$$

4) I が $\exists$ 右：

$$
\frac{\Gamma \to \Theta,\ \mathfrak{F}(s)}{\Gamma \to \Theta,\ \exists x\mathfrak{F}(x)}
$$

$(\exists xF(x))^*$ は $\neg\forall x\neg F^*(x)$ であるから，

$$\vdots$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma^*,\ \neg\mathfrak{F}^*(s) \to \Theta^*}{\neg\mathfrak{F}^*(s),\ \Gamma^* \to \Theta^*}}{\forall x \neg\mathfrak{F}^*(x),\ \Gamma^* \to \Theta^*}}{\Gamma^* \to \Theta^*,\ \neg\forall x \neg\mathfrak{F}^*(x)}\ .$$

I が他の推論の場合にも同様にして証明図が作られる．(終)

1·11　HA の排中律

体系 HA の provable な formula について一言ふれておきたい．1·2の定義で，HA の式の右辺には，quantifier をもつ式の formula が高々一個という制限がある．これは LJ の式の右辺に，高々一つの formula のみ許す，という制限に対応する．その制限により第1章の § 6. でみたように，LJ では排中律 ($\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$) が一般には provable でない．$\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ を主張するためには，($\mathfrak{A}$ の変数の値が定められたとき) $\mathfrak{A}$ が真であることを明らかにするか，$\neg\mathfrak{A}$ が真であることを明らかにしなければならない．ところが直観主義では，たとえば $\exists x\mathfrak{A}(x)$ を主張するためにはある具体的な方法があって，$\mathfrak{A}(x)$ となるような x を実際に提出できなければならない．単に，「このような x があるはずだ」，ではだめだというのである．したがってこのような formula については，必ずしも $\mathfrak{A}$ または $\neg\mathfrak{A}$ を明らかにはできない，ゆえに $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ を主張できない，というのである．LJ はこのような原理の形式化であった．

HA ではどうなるのだろうか．HA でも一般には排中律が証明されないことが知られている．これは HA が直観主義の論理を基礎にした自然数論の形式化であることを考えれば，当然といえる．しかし，quantifier-free な formula については，式の右辺の制限がないので，排中律が成り立つ．quantifier-free な formula は有限の立場で真偽決定可能である，ゆえに A が quantifier-free ならば A が真であるか $\neg A$ が真であるか常に具体的な方法で決定でき，したがって $\mathfrak{A} \vee \neg\mathfrak{A}$ が主張できる，という主旨なのであり，それが HA で具現されているのである．排中律の系として，たとえば Aと B が quantifier-free のとき，$(A \vdash B) \sim (\neg B \vdash \neg A)$ なども HA で provable である．

ところで 1·8 の結果は，NN と HA の差が，実は本質的なものではない，ということを示している，と解釈できる．もちろんそれは formula $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{A}^*$ への変形が，Aの内容をすっかり変えてしまうものではないという見方をしてのことであるが，Gödel 自身，直観主義的算術が古典的算術より狭いのは見かけ上のことだけであり，直観主義的な制限は，解析や集合論においてその真価を発揮するものである，ということを指適している．

後に 3·2 と 5·1 で他の体系が定義されるが，そこでも quantifier-free な formula については，式の右辺に制限をつけない．したがって，排中律およびその系がすべて provable となる．

§ 2. 計算可能な functional

この節では，計算可能な functionalという概念を内容的に説明する．正確な形式化は次の節で行なわれる．

2·1 primitive recursive（原始帰納的）な函数

序論の「有限の立場における自然数論」で，有限の立場で認められる数論的函数（変数の値も函数の値も自然数であるような函数）についての検討がなされた．ここで特に重要なのは，函数の構成原理としてあげられた（2）である．これを primitive recursion（原始帰納法）による函数の定義という．+1（本章では$'$）のようなはっきりわかった函数から出発し，それらの単純な組み合わせと primitive recursion によって次々と構成される各函数を primitive recursive（原始帰納的）な函数という．これらはすべて有限の立場で認められるものである．正確には primitive recursive な函数の族は，次のように定義される．

下の三種類の函数は，primitive recursive な函数である．

（1）　$f(a)=a'$ $(=a+1)$

（2）　$f(a_1, \cdots, a_k)=q$ （q は定数）

（3）　$f(a_1, \cdots, a_k)=a_i$，$1\leq i\leq k$.

次の（4）と（5）で，$g, g_1, \cdots, g_m, h$ が primitive recursive ならば，f も

そうである.

（4）　$f(a_1, \cdots, a_k) = g(g_1(a_1, \cdots, a_k), \cdots, g_m(a_1, \cdots, a_k))$

（5）　$f(0, a_2, \cdots, a_k) = g(a_2, \cdots, a_k)$;

$$f(n', a_2, \cdots, a_k) = h(n, f(n, a_2, \cdots, a_k), a_2, \cdots, a_k),$$

ただし $k=1$ のとき $g(a_2, \cdots, a_k)$ は定数を意味する.

（5）は primitive recursion（原始帰納法）の図式とよばれる.

2·2　計算可能な函数

ある函数 $f(a)$ が計算可能とは，f に固有のはっきりした指示があり，a の各値に対して $f(a)$ という値が，その指示にのみしたがって計算されることをいう. primitive recursive な函数はこの意味で計算可能である. たとえば，a が決まれば a' は $a+1$，ゆえに a の次に $+1$ という図形を加える操作が指示されていると思えばよい.

（5）で，g と h が計算可能，すなわち計算方法の指示が与えられているとする. $m=0$ のとき，$f(m, a_2, \cdots, a_k)$ は g の計算に帰着される. m が 0 でなければ，$m=n'$ となる n が一意的に決まり，$f(n, a_2, \cdots, a_k)$ が計算されれば第二の式により $f(m, a_2, \cdots, a_k)$，すなわち $f(n', a_2, \cdots, a_k)$ は h の計算に帰着される. n から n' への移行の処方箋は n に独立であるから，$n=0, 1, 2, \cdots$ と同じ指示にしたがって計算をくり返せば $n'=m$ まで行きついて，$f(m, a_2, \cdots, a_k)$ を得る. ゆえに（5）の図式そのものが f の計算方法の指示になっていることがわかる.

計算可能な函数で，primitive recursive でないものもあるのだが，それについては深入りしないことにする.

次に，函数から函数への対応のような，高い次元の対応規則を考える.

2·3　有限の type の functional

type 0 の functional とは，自然数のこととする. type t_0，type $t_1, \cdots$, type t_k の各々について functional の概念が定義されているとき，type$(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ の functional とは，type t_1，type $t_2, \cdots$, type t_k の functional から成る k 対に，type t_0 の functional を対応させる規則である. このように

定義された type を有限の type といい，このような functional を有限の type の（有限の type をもつ）functional という．なお，今後扱うfunctional はすべて有限の type をもつので，単に functional とよぶことが多い．

例として，type $(0, 0, \cdots, 0)$ の functional とは，数論的函数のことである．

有限の type の計算可能な functional とは，上記の定義で，'functional' の代わりに'計算可能な functional' と置いて得られるものである．

2·4 primitive recursive な functional

2·1 の primitive recursive という概念を有限の type に拡張して得られる functional を，primitive recursive な functional という．図式としては2·1 の(1)―(5)をとればよい．ただし変数は（1）の a と（5）の n 以外は任意の type でよく，函数の値が再び functional になり得る．

そこで，（5）の意味を考えてみよう．話をかんたんにするため，$a_2, \cdots, a_k$ を抜かし，

（6）
$$\varphi(0)=g\,;$$
$$\varphi(n')=h(n, \varphi(n))$$

が与えられているものとする．ここで g と h はすでに primitive recursive な functionalとして定義されているとする．このようにして定義されるfunctional が 2·2 の意味の計算可能な functional であると主張したいのだが，ここで 2·2 のような数論的函数と事情が異なるのは，変数や函数の値が自然数のような性質のよくわかったものではないことである．$\varphi(0)$ の値が functional であるとき，φ が計算可能とはどういうことなのか．g とは，2·3 の定義によれば，ある対応規則である．そのような抽象的概念が $\varphi(0)$ の値として得られた，と断言できる，すなわち g を'それと認識できる'ためには，g というものがはっきりわかっていなければならない．では，ある functional の性質がよくわかっているとはどういうことなのか．たとえば，問題の functional が数論的函数とするとき，函数がはっきりわかっているということは，変数の値と函数の値の対応規則がはっきりわかっていることにほかならない．言い換えれば，そ

の函数が計算可能，ということになる．この意味で計算可能ということと，性質がはっきりわかっている，あるいは認識可能，ということを同一視できると思ってよい．ゆえに，ある functional が計算可能というとき，認識可能性という概念，さらに，その functional の各値も再び計算可能である，ということも含むと仮定すべきである．このような事情のもとで（6）を考えると，g と h がすでに計算可能ならば，2·2 と同様に φ に対する計算方法の指示が与えられている．すなわち primitive recursive な函数は計算可能である．

定義から明らかなように，ある type t が $(t_0, t_1, \cdots, t_k)$ であるとき，$t_0, t_1, \cdots, t_k$ のうち 0 でないものは再びいくつかの type から定義されている．このようにして前へ前へと type を分解してゆくと，しまいには 0 に行きつく．このような操作を仮りに t の分解とよぶならば，t の分解は一意的である．t の分解の途中にあらわれる type を，t より低い type ということにする．$f(a_1, \cdots, a_k)$ が type t の計算可能な functional であれば，$a_1, \cdots, a_k$ の値として計算可能な functional を与えると，ある type t_0 の functional g を定める．type t_0 は type t より低い．g は計算可能であるから，g について再び同じことが考えられる．すなわち，f は t より低いすべての type の functional についての情報を含んでいる，とみられる．

有限の type の場合には数論的函数の場合と異なり，計算可能性と primitive recursive であることとを同一視することにする．

2·5 λ-記号

λ という記号が，functional を抽象化する，あるいは 'type をあげる' ために使われる．たとえば，a と b が（任意の）自然数のとき，$a+b$ はある性質を満足する別な自然数をあらわす．これを，$\lambda x(a+x)$ と書くと，$a+x$ を x の函数とみなす，ということになる．任意の固定された a について，x を変数とした（一変数）函数 $a+x$ を得，x に任意の自然数 b を代入すると，値 $a+b$ を得る，ということである．もう一つ λ をつけて，$\lambda y(\lambda x(y+x))$ を考えると，これはまず y を変数とした functional で，y に値 a を代入すると，functional の値 $\lambda x(a+x)$ を得る．すなわち，$\lambda y(\lambda x(y+x))$ は，a に $\lambda x(a+x)$

を対応させるような functional であり，$\lambda x(a+x)$ は b に $a+b$ を対応させるような functional である．

定義からわかるように，λ で束縛される変数の名称は重要でない．$\lambda x(a+x)$ も $\lambda y(a+y)$ も同じ函数をあらわす．しかし λ をつける順序が異なれば，異なる functional をあらわす．上の例でもそうなのだが，もう少しわかりやすい例として，m^n を考えよう．m も n も変数とする．$\lambda x(\lambda y(x^y))$ は，x に m を代入すれば $\lambda y(m^y)$ を得る．すなわち，固定された m について $\lambda y(m^y)$ は m のべき函数となる．$\lambda y(\lambda x(x^y))$ の y に n を代入すると，$\lambda x(x^n)$ を得る．これは，'n 乗' という函数で，m^y とは性質を異にする．

2·6　一変数の functional

一変数の functional は有限の type の functional の特殊なものであるが，実は一変数のものだけで実質的には十分なのである．数論的函数だけを扱う場合にはこういうことはいえないが，有限の type 全体を考えるときには，多変数の functional はそれと同等の働きをするより高い type の functional で代用できるのである．ゆえに一変数のものに限っても，何も失われない．この事実については例をあげて説明するにとどめるが，以下形式的体系を定義するときは，断わらずに一変数の functional のみを扱う．

たとえば二変数函数＋を考えよう．2·5 で扱った＋の 'type をあげたもの'，$\lambda x(\lambda y(x+y))$ は，x の値 a と y の値 b を決めると，まず $\lambda y(a+y)$ を，ついで $a+b$ を得る．この意味で，$\lambda x(\lambda y(x+y))$ は実質的に＋をあらわす．その type は $(0, (0, 0))$ である．

§3.　primitive recursive な functional の体系（T）と Gödel interpretation

Gödel は，自然数論の無矛盾性の証明で厳密に有限的な立場を越える部分として，第2章のような ε_0 までの順序数の理論，または本章の §1. で述べたような直観主義的立場，のほかに，§2. で述べたような有限の type の計算可能な functional の存在を基礎にすることもできることを明らかにした．

3·1 Gödel の意想の概要

まず有限の type の primitive recursive な functional の体系 T を考える．T の formula はすべて quantifier-free で，HA の記号（から＋と・を除いたもの）のほかに各 type の変数および primitive recursive な functional をあらわす記号が認められ，atomic な formula は functional の間の＝のみから成る．公理は，＋と・に関するもの以外の HA の始式の他，functional の定義式があり，推論は命題論理のそれと帰納法から成る．

問題は HA を T に飜訳することで，そのための媒介としてまず HA の formula $\mathfrak{A}$ に T の記号に各 type の quantifier を加えた記号体系で定義される formula $\mathfrak{A}'$ を対応させる．ここで $\mathfrak{A}'$ は常に

$$\forall x\cdots\exists y\cdots A(x,\cdots,y,\cdots)$$

の形をしており，$\mathfrak{A}$ と $\mathfrak{A}'$ は内容的に同値なものである．ただし，$\forall x\cdots$ は $\forall$がいくつか並んでいること，$\exists y\cdots$ は $\exists$ がいくつか並んでいることを意味し，$x,\cdots,y,\cdots$ は適当な type の束縛変数である．この変形の一つの主眼は，$\vdash$の解釈にある．たとえば $\mathfrak{A}$ が $\exists x\mathfrak{B}(x)\vdash\exists y\mathfrak{C}(y)$ のとき，$\mathfrak{A}$ は，次のような，x を変数とする計算可能な functional の存在，を主張するものと解釈される：その函数は x の各値に対して $\mathfrak{B}(x)$ が真ならば $\mathfrak{C}(y)$ が真になるような y の値を対応させる．

Gödel の結果は，もし $\mathfrak{A}$ が HA で provable ならば，$\mathfrak{A}'$を $\exists x\forall yA(x,y)$ とするとき，$\mathfrak{A}$に含まれる自由変数のみを変数とする適当な type の primitive recursive な functional f が存在し，$A(f(a),y)$ が T で provable である，ということである．以下 $\mathfrak{A}$ の変形 $\mathfrak{A}'$ を，$\mathfrak{A}$ の Gödel interpretation とよぼう．

3·2 体系 T の定義

まず体系 T を正確に定義する．

1) type　0という記号は type であり，もし σ と τ が type であれば $\sigma\langle\tau\rangle$ も type である：このようにして得られるもののみが type である．

$\sigma\langle\tau_1\rangle\langle\tau_2\rangle\cdots\langle\tau_n\rangle$ の形の type は $\sigma\langle\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_n\rangle$と略記されるのが普通である．

2) 基本的記号 T の基本的記号は 0, ′, =, 各 type の自由変数および束縛変数各々可算個, ⟨ ⟩, [ ], ρ, λ および命題論理の記号 ∧, ∨, ᄀ, ⊢ である.

自由変数は $\alpha, \beta, \cdots$ 等，束縛変数は $\varphi, \psi, \cdots$ 等であらわし，特に type が0のことを強調するときは自由変数に $a, b, \cdots$，束縛変数に $x, y, \cdots$ を使う．なお基本的記号の0と type の0は記号で区別しないが，内容から混乱のおそれはないと思う.

3) term および primitive recursive な functional

3·1) 0 は type 0 の term である.

3·2) type τ の自由変数は type τ の term.

3·3) t が type 0 の term ならば，t' は type 0 の term.

3·4) f が type σ の term，α が type τ の自由変数，φ が type τ の束縛変数で，f にあらわれないものならば，$\lambda\varphi f'$ は type $\sigma\langle\tau\rangle$ の term．ただし f' は f からすべての α を φ で置き換えて得られるもの．これをふつう $f(\alpha)$ から $f(\varphi)$ を得る，というふうにあらわす．なお α が f に全然あらわれなくてもよい.

3·5) s が type $\sigma\langle\tau\rangle$ の term で t が type τ の term ならば，$s\langle t\rangle$ は type σ の term.

3·6) s が type τ の term で t が type $\tau\langle 0,\tau\rangle$ の term ならば，$\rho[s,t]$ は type $\tau\langle 0\rangle$ の term である.

term は以上によって構成されるもののみである．$s\langle t_1\rangle\langle t_2\rangle\cdots\langle t_n\rangle$ の形の term は，$s\langle t_1t_2\cdots t_n\rangle$ または $s\langle t_1, t_2, \cdots, t_n\rangle$ と略記される.

自由変数をもたない term は，（有限の type の）primitive recursive な functionalとよばれる．定義からわかるように，type 0 の primitive recursive な functional とは $0, 0', 0'', \cdots$ すなわち自然数 $0, 1, 2, \cdots$ をあらわす．また，f が type $\sigma\langle\tau\rangle$ の functional とは，type τ の任意の functional g を f の変数に与えると，f の値が type σ の functional として決まるような対応規則をあらわす．ここでは一変数の functional のみ扱っているが，2·6 で

説明したように，内容的にはそれで十分なのである．

$\rho[s,t]$ は 2·4 の図式（6）で，g を s,t を h，としたときの φ である．すなわち，$\rho[s,t]$ は，$\varphi(0)=s$，$\varphi(n')=t(x,\varphi(n))$，で定義される φ をあらわす．これは後に与えられる ρ についての公理からわかる．

term s と t が，'束縛変数以外は同形である' とは，s と t の定義が，3·4) 以外全く同じで，3·4) の適用に際してたとえば s には束縛変数 φ を使って $\lambda\varphi f(\varphi)$ が得られるとき，t には同じ type の別な ψ が使われる，ということである．ただし φ と ψ が同じであってもよい．内容的には s と t は全く同じ functional をあらわす，という意味である．

なお今後変数や term の有限列が続出するので，その記法を決めておくと便利である．$\mathfrak{a},\mathfrak{b},\cdots$ などは自由変数の有限列，$\mathfrak{x},\mathfrak{y},\cdots$ などは束縛変数の有限列，$\mathfrak{r},\mathfrak{s},\cdots$ などは term の有限列，$\mathfrak{r}\langle\mathfrak{a}\rangle$ などは term の列 $\mathfrak{r}_1\langle\mathfrak{a}\rangle,\mathfrak{r}_2\langle\mathfrak{a}\rangle,\cdots,$ $\mathfrak{r}_m\langle\mathfrak{a}\rangle$ などをあらわす．

4) formula と式　T の formula は同じ type の term s と t について $s=t$ の形をしたものを基礎（atomic formula）として，$\wedge,\vee,\neg,\vdash$ を何回か施して得られるものである．T の式は，T の formula $A_1,A_2,\cdots,A_m,$ $B_1,B_2,\cdots,B_n$ について，

$$A_1,A_2,\cdots,A_m\rightarrow B_1,B_2,\cdots,B_n$$

の形のものである．m または n が0でもよい．

5) T の証明図　T の証明図は T の式から成り，以下にあげる公理および D→D の形の式を始式とし，NN の証明図と同様に定義される．ただし quantifier に関する推論はなく，帰納法は都合上わずかに変形する．

正式の規則ではないが，以後，T の formula のように quantifier-free な formula を $A,B,\cdots$ などローマ字であらわし，一般の formula を $\mathfrak{A},\mathfrak{B},\cdots$ などのようにドイツ文字であらわすことが多い．また，term の中の記号の結合具合を示すために（　）を使うことがよくあるが，意味は内容からわかると思う．

公理：　$\to s=s$

$$s=t \to t=s$$

$$r=s,\ \ s=t \to r=t$$

$$s=t \to s'=t$$

$$s'=t' \to s=t$$

$$s'=0 \to$$

$$s_1=s_2,\ \ t_1=t_2 \to s_1\langle t_1\rangle=s_2\langle t_2\rangle$$

$$(\lambda\varphi f(\varphi))\langle t\rangle=f(t)$$

$$\to \rho[s,t]\langle 0\rangle=s$$

$$\to \rho[s,t]\langle r'\rangle=t\langle r,\rho[s,t]\langle r\rangle\rangle$$

$$\to \lambda\varphi s\langle\varphi\rangle=s$$

s と t が束縛変数以外は同形であるとき，　　$\to s=t$

$$s=t \to f(s)=f(t)$$

ここで，r, s, t, f 等は適当な type の任意の term，ただし第三，第四，第五式の s および t，第九式の r は type 0.

帰納法は次の形にする：

$$\frac{\Gamma \to \Delta,\ \ F(0) \qquad F(a),\ \ \Pi \to \Lambda,\ \ F(a')}{\Gamma,\ \ \Pi \to \Delta,\ \ \Lambda,\ \ F(s)}.$$

この形でも，第２章の形をとっても，Tが体系として同値になることは容易に証明される．

以下の議論で，次の命題を仮定する：

3·3　体系 T に次の推論を加えても，体系として変化しない，すなわち，provable な式は同じものである：

$$\frac{\Gamma \to \Delta, F(0,\mathfrak{b}) \qquad F(a,\mathfrak{r}\langle a,\mathfrak{b}\rangle),\ \Pi \to \Lambda, F(a',\mathfrak{b})}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, F(s,\mathfrak{t})}$$

ただし a は type 0 の自由変数，$\mathfrak{b}$ は任意の自由変数の列，a も $\mathfrak{b}$ も下式にあらわれない，s は type 0 の任意の term，$\mathfrak{r}\langle a,b\rangle$ と $\mathfrak{t}$ はしかるべき type の term の列で，$\mathfrak{r}$ と $\mathfrak{t}$ は a も $\mathfrak{b}$ も含まない．

命題の意味は，上式が両方とも T で provable ならば下式も T で provable ということである．今後Tの帰納法は，この形を意味するものとする．証明は 4·6 までのばす．

次の命題は第1章の 2·4 と同様にして証明できる．

3·4 a が自由変数，s が同じ type の term，S が T で provable な式ならば，s にあらわれるすべての α を s で置き換えて得られる式も T で provable で，しかも S の証明図と本質的には同じ証明図でよい．

証明図が本質的に同じとは，α を各場所で s に換えただけと思えばよい．詳しいことは第1章の 2·4 を見てほしい．

3·5 T の任意の formula $F(\alpha)$ について，

$$s=t,\ \ F(s)\rightarrow F(t)$$

が T で provable である．

$F(\alpha)$ が atomic ならば，始式 $s=t\rightarrow f(s)=f(t)$ をもとにして証明される．そうでないときは帰納法による．

3·6 ＋と・の定義

primitive recursive な函数の例として，＋と・が実際に T の functional として定義され，しかるべき性質をみたすことを示そう．

＋に対応する functional は $\lambda z\rho[z, \lambda y\lambda xx']$，ここで x, y, z は type 0 である．これを仮りに＋とよび，$+\langle a, b\rangle$ を $a+b$ と書こう．また・に対応する functional は，$t(a)$ を $\lambda v\lambda u(u+a)$ とするとき，$\lambda w\rho[s, t(w)]$ である．

＋について必要なのは，

$$a+0=a$$

と

$$a+n'=(a+n)'$$

が T で provable なことであるが，

$$a+0=\lambda z\rho[z, \lambda y\lambda xx']\langle a, 0\rangle=\rho[a, \lambda y\lambda xx']\langle 0\rangle=a\ ;$$

$$\begin{aligned}a+n'&=\lambda z\rho[z, \lambda y\lambda xx']\langle a, n'\rangle=\rho[a, \lambda y\lambda xx']\langle n'\rangle\\&=\lambda y\lambda xx'\langle n, \rho[a, \lambda y\lambda xx']\langle n\rangle\rangle=\lambda xx'\langle\rho[a, \lambda y\lambda xx']\langle n\rangle\rangle\end{aligned}$$

$$=(\rho[a, \lambda y \lambda x x']\langle n\rangle)' = (a+n)'$$

が次々に T で provable である.

・については,

$$a\cdot 0=0$$

と

$$a\cdot n' = a\cdot n + a$$

が, T で provable なことをいえばよい. 証明は＋の場合を参考に行なえばよい.

3·7 Gödel interpretation

T の基本的記号には各 type の束縛変数が各々可算個あるから, それらによって各 type の quantifier を導入して得られる formula の集合を考える. すなわち, formula の定義に次の一項を加える：$\mathfrak{F}$がすでに定義された formula, α が自由変数, φ が α と同じ type の束縛変数で $\mathfrak{F}$ にあらわれないもの, とするとき, $\forall\varphi\mathfrak{F}'$ と $\exists\varphi\mathfrak{F}'$ は formula である. ただし $\mathfrak{F}'$ は $\mathfrak{F}$ からすべての α を φ で置き換えて得られる. このような formula の集合を $\mathcal{F}$ と名づけておく.

HA の任意の formula $\mathfrak{A}$ の Gödel interpretation とは $\mathfrak{A}$ と同じ意味をもつ $\mathcal{F}$ の formula で, $\exists\varphi_1\cdots\exists\varphi_m\forall\psi_1\cdots\forall\psi_n A(\varphi_1, \cdots, \psi_1, \cdots)$ の形のものである. ここで A は quantifier-free で, $\varphi_1, \cdots, \varphi_m, \psi_1, \cdots, \psi_n$ は有限の type の束縛変数であり, A の中の自由変数は $\mathfrak{A}$ に入っているもののみ, したがってすべて type 0 である.

$(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ のような束縛変数の列をドイツ文字 $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \cdots$ などであらわし, $\exists\varphi_1\cdots\exists\varphi_m$ のような quantifier の列をかんたんに $\exists\mathfrak{x}$ などであらわす. ゆえに上記の Gödel interpretation は $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ のように略記される. これをまた $\mathfrak{A}^G$ と書くこともある. $\mathfrak{A}$ の Gödel interpretation $\mathfrak{A}^G$ の定義は, $\mathfrak{A}$ の degree に関する帰納法によるが, T には HA の＋と・がそのままの形で入っていないので, まず term の書き換えを行なう. **HA の term s の, T における書き換えを s^* とあらわす.**

1)　s が 0 または自由変数ならば，s^* は s そのもの．

2)　s が t' のとき s^* は $(t^*)'$．

3)　s が $r+t$ のとき，s^* は $+\langle r^*, t^*\rangle$，ただしこの $+$ は 3·6 で定義されたもの．s が $r\cdot t$ のとき s^* は $\cdot\langle r^*, t^*\rangle$，ただしこの・は 3·6 で定義されたもの．

任意の HA の term s について s^* が type 0 の T の term になることは，容易に証明される．

formula の Gödel interpretation は次のように定義される．

1)　$\mathfrak{A}$ が quantifier-free のとき，$\mathfrak{A}$ の中の各 atomic formula $s=t$ を，$s^*=t^*$ で置き換えて $\mathfrak{A}^G$ を得る．正確には $\mathfrak{A}$ に含まれる論理記号の数による帰納法を使うのだが，上の説明で十分明らかと思う．

以下 $\mathfrak{A}$ が quantifier を実際に含むとし，$\mathfrak{A}$ の一部である $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ について $\mathfrak{B}^G$: $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})$, $\mathfrak{C}^G$: $\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{v}C(\mathfrak{u},\mathfrak{v})$ がすでに定義されているとする．ここで $\exists\mathfrak{x}$, $\forall\mathfrak{y}$, $\exists\mathfrak{u}$, $\forall\mathfrak{v}$ の一部が実際にはないこともある．

2)　$\mathfrak{A}$ が $\neg\mathfrak{B}$ のとき，$\mathfrak{A}^G$ は $\exists\mathfrak{z}\forall\mathfrak{x}\neg B(\mathfrak{x},\mathfrak{z}\langle\mathfrak{x}\rangle)$，ただし $\mathfrak{z}\langle\mathfrak{x}\rangle$ は前に注意したように $z_1\langle\mathfrak{x}\rangle,\cdots,z_m\langle\mathfrak{x}\rangle$ のような表現の略記である．

3)　$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B}\wedge\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\vee\mathfrak{C}$, $\mathfrak{B}\vdash\mathfrak{C}$ の一つのとき，$\mathfrak{A}^G$ は各々，

$$\exists\mathfrak{x}\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{y}\forall\mathfrak{v}(B(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\wedge C(\mathfrak{u},\mathfrak{v})),$$
$$\exists x\exists\mathfrak{x}\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{y}\forall\mathfrak{v}((x=0\wedge B(\mathfrak{x},\mathfrak{y}))\vee(\neg x=0\wedge C(\mathfrak{u},\mathfrak{v}))),$$
$$\exists\mathfrak{w}\exists\mathfrak{z}\forall\mathfrak{x}\forall\mathfrak{v}(B(\mathfrak{x},\mathfrak{z}\langle\mathfrak{x},\mathfrak{v}\rangle)\vdash C(\mathfrak{w}\langle\mathfrak{x}\rangle,\mathfrak{v}))$$

と定義される．

4)　$\mathfrak{A}$ が $\forall\varphi\mathfrak{F}(\varphi)$ または $\exists\varphi\mathfrak{F}(\varphi)$ のとき，$(\mathfrak{F}(\alpha))^G$: $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}F(\alpha,\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ が定義されているとする．$\mathfrak{A}^G$は，各々 $\exists\mathfrak{z}\forall\varphi\forall\mathfrak{y}F(\varphi,\mathfrak{z}\langle\varphi\rangle,\mathfrak{y})$,
$\exists\varphi\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}F(\varphi,\mathfrak{x},\mathfrak{y})$ である．

$\mathfrak{A}^G$ は内容的に $\mathfrak{A}$ と同値な formula である．そのことはしかるべき体系の中で形式的に証明される．詳しいことは § 5. で述べる．

次の事実は定義の系である．

3·8　$\mathfrak{A}$ が HA の formula のとき，$\mathfrak{A}^G$ の自由変数と $\mathfrak{A}$ の自由変数は全く

同じ，したがって type 0，であり，$\mathfrak{A}$ が quantifier をもつことと，$\mathfrak{A}^G$ が quantifier をもつこととは同時である．$\mathfrak{A}^G$ の predicate は type 0 の＝のみであり，したがって Gödel interpretation を考えるときは atomic formula としては type 0 の s と t について $s=t$ の形のみを考えればよい．ただし s や t の中に高い type の変数があらわれる可能性はある．

3·9 表現函数

一般に a を変数とする性質 $P(a)$ に対し，a を変数とし，値が 0 と 1 のみの函数 f があって，$f(a)=0$ であることと $P(a)$ が真なことと同等であるとき，f を P の表現函数という．T ではこの事実が形式的に述べられる．すなわち，

自由変数は $\mathfrak{a}$ のみ，pedicate は type 0 の ＝ のみから成る T の任意の formula $A(\mathfrak{a})$ に対して，T の primitive recursive な functional f が存在し，$\to f\langle\mathfrak{a}\rangle=0 \vee f\langle\mathfrak{a}\rangle=0'$ と，$\to A(\mathfrak{a}) \mapsto f\langle\mathfrak{a}\rangle=0$ が T で provable である．$0'$ は 1 と略すことが多い．

このとき f を $A(\mathfrak{a})$ の（T での）表現函数という．

（証明） まずいくつかの数論的函数を T の functional として定義する．以下，最初の等式は函数の満すべき数論的な性質であり，$f:s$ という表現は，f に対応する T の functional s が与えられる，ということを意味する．

1) $I_1^2(a,b)=a$. $I_1^2 : \lambda x(\lambda y x)$

2) $V(0)=0$; $V(a')=a$. $V : \rho[s,t]$，ただし s は 0，t は I_1^2.

3) $a \dot{-} b = \begin{cases} a-b & a \geq b \text{ のとき}, \\ 0 & a<b \text{ のとき}. \end{cases}$

t を $\lambda x \lambda y V(y)$ としたとき，$\dot{-} : \lambda x \rho[x,t]$.

4) $sg(a) = \begin{cases} 1 & a>0 \text{ のとき}, \\ 0 & a=0 \text{ のとき}. \end{cases}$

s を 0, t を $\lambda x \lambda y\ 1$ としたとき，$sg : \rho[s,t]$.

5) ＋と・は 3·6 で定義した．

6) $E_q(a,\ b)=\begin{cases}0 & a=b \text{ のとき},\\ 1 & a\neq b \text{ のとき}.\end{cases}$

E_q : $\lambda x\lambda y sg((x\dot{-}y)+(y\dot{-}x))$.

7) $\overline{sg}(a)=\begin{cases}0 & sg(a)=1 \text{ のとき},\\ 1 & sg(a)=0 \text{ のとき}.\end{cases}$

$\overline{sg}$: $\lambda x(0'\dot{-}sg\langle x\rangle)$.

たとえば$\dot{-}$について，必要な性質を T で証明してみよう． $\lambda x\rho[x,t]\langle a\rangle=\rho[a,t]$. ゆえに $\rho[a,t]\langle 0\rangle=a$ すなわち $a\dot{-}0=a$. $\rho[a,t]\langle n\rangle$ が $a\dot{-}n$ をあらわすとする．

$\rho[a,t]\langle n'\rangle=t\langle n,\rho[a,t]\langle n\rangle\rangle=V\langle\rho[a,t]\langle n\rangle\rangle$. これは $V(a\dot{-}n)$ をあらわす． V については必要な性質が証明されているとして，

$$V(a\dot{-}n)=\begin{cases}0 & a\dot{-}n=0 \text{ のとき},\\ m & a\dot{-}n=m' \text{ のとき}.\end{cases}$$

$a\dot{-}n=0$ ならば $a\dot{-}n'=0$ ゆえにこれでよい． $a\dot{-}n>0$, すなわち $a\dot{-}n=m'$ ならば，$a\dot{-}n=a-n=m'$. ゆえに $(a\dot{-}n'=a-n'=m)$ であるから，$\dot{-}$の条件を満足する．

これらの函数を基礎として，A の degree に関する帰納法で命題を証明する． s が T の term のとき，$s(\mathfrak{a})$ は $\mathfrak{a}$ が s の中の自由変数をすべて尽し，s の中の $\mathfrak{a}$ の各変数があらわれる場所がすべて指示されているものとする．ただし s の中に実際にあらわれない変数があってもよい．この記法で，$\mathfrak{x}$ が $\mathfrak{a}$ と同じ type の束縛変数の列とすると，$s=t$ の表現函数は $f:\lambda\mathfrak{x}E_q(s(\mathfrak{x}),t(\mathfrak{x}))$ で与えられる． f を一意的に決めるために，$\mathfrak{a}$ はちょうど $s=t$ にあらわれる自由変数の列とし，順序は適当に決めておくものとする．表現函数としての条件，

$$\rightarrow f\langle a\rangle=0\vee f\langle\mathfrak{a}\rangle=1$$

と

$$\rightarrow s=t \longmapsto f\langle a\rangle=0$$

が T で provable なことは，容易に証明される．

A が $B(\mathfrak{a},\mathfrak{b})\wedge C(\mathfrak{a},\mathfrak{c})$, ただし，$\mathfrak{b}$ は B にのみあらわれる自由変数の列，$\mathfrak{c}$ は C のみにあらわれるもの，$\mathfrak{a}$ は共通，であるとき，B の表現函数 f と C

の表現函数 g が与えられているものとして，A の表現函数を

$$\lambda\mathfrak{x}\lambda\mathfrak{y}\lambda\mathfrak{z} sg\langle f\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{y}\rangle + g\langle \mathfrak{x}, \mathfrak{z}\rangle\rangle$$

と定義する．ただし $+\langle a, b\rangle$ を $a+b$ と略記した．また $\lambda\mathfrak{x}$ は $\lambda\mathfrak{x}_1\lambda\mathfrak{x}_2\cdots\lambda\mathfrak{x}_m$ のような表現の略であり，今後たびたび使う．

他の論理記号についても同様に定義される．∨には・，⌐には $\overline{sg}$ が必要である．（終）

3·10 式の Gödel interpretation

HA の式 S：

$$\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \cdots, \mathfrak{A}_m \to \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_n$$

の Gödel interpretation とは S^G：

$$\mathfrak{A}_1{}^G, \mathfrak{A}_2{}^G, \cdots, \mathfrak{A}_m{}^G \to \mathfrak{B}_1{}^G, \mathfrak{B}_2{}^G, \cdots, \mathfrak{B}_n{}^G$$

である．ここで $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_n$ のうち，高々一つが quantifier をもつのであり，したがって $\mathfrak{B}_1{}^G, \mathfrak{B}_2{}^G, \cdots, \mathfrak{B}_n{}^G$ についてもそうである．

3·11 type の上げ下げ

各 type についてその type の degree と型を定義する．型は type の有限列である．

0 の degree は 0，型はない．$\sigma\langle\tau\rangle$ の degree は σ と τ の degree で大きい方に1をたしたもの，型は，σ の型が $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ ならば $(\tau, \sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ と定義する．

次の二つの補助定理を証明する．

補助定理 1. s が type 0 の term とすると，各 type σ について type σ の s に対応する term s^σ がある．すなわち，s^σ は s とちょうど同じ自由変数をもち，σ の型が $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ ならば，type が各々 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の任意の term $s_1, \cdots, s_n$ について，$s^\sigma\langle s_1, \cdots, s_n\rangle$ は type が 0で，

$$s = s^\sigma\langle s_1, \cdots, s_n\rangle$$

が T で provable である．

（証明） σ の degree に関する帰納法による．σ が0ならば s 自身をとればよい．σ が $\eta\langle\tau\rangle$ で σ の型が $(\tau, \sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ とする．s^η はすでに定義されて

いる．φ を s にあらわれない，type τ の束縛変数として，s^{σ} を $\lambda\varphi s^{\eta}$ と定義する．$t, s_1, \cdots, s_n$ を，type が各々 $\eta, \sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の任意の term とすると，

$$s^{\sigma}\langle t, s_1, \cdots, s_n\rangle = s^{\eta}\langle s_1, \cdots, s_n\rangle = s$$

が T で provable．第二の等号は帰納法の仮定による．(終)

補助定理 2. s を type σ の term で σ の型が $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$ とすると，type が各々 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の自由変数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ によって $s\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ が type 0 であるようにできる．しかも type が各々 $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の束縛変数 $\varphi_1, \cdots, \varphi_n$ により，$s = \lambda\varphi_1\cdots\lambda\varphi_n s\langle\varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle$ となる．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ はもちろん任意の，しかるべき type の term でよい．

(証明)　σ の degree に関する帰納法による．σ が 0 ならば s 自身でよい．σ が $\eta\langle\tau\rangle$ とし，η の型が $(\sigma_1, \cdots\sigma_n)$ とする．type τ の自由変数 α について，$s\langle\alpha\rangle$ は type η，ゆえに帰納法の仮定により，type $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の自由変数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ により $s\langle\alpha\rangle\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle = s\langle\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ が type 0 であり，

$$\begin{aligned}\lambda\varphi\lambda\varphi_1\cdots\lambda\varphi_n s\langle\varphi, \varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle &= \lambda\varphi(\lambda\varphi_1\cdots\lambda\varphi_n s\langle\varphi\rangle\langle\varphi_1, \cdots, \varphi_n\rangle)\\ &= \lambda\varphi(s\langle\varphi\rangle) = \lambda\varphi s\langle\varphi\rangle = s.\end{aligned}$$

第二の等式は帰納法の仮定により，最後の等式は始式である．

補助定理 1 のかんたんな系として，各 type についてその type の primitive recursive な functional が存在する；s を 0 とすればよい．

二つの補助定理を利用して，種々な functional を高い type に "上げる" ことができる．例として＋を考えよう．＋は type $0\langle 0, 0\rangle$ の functional であるが，各 type σ について $\sigma\langle\sigma, \sigma\rangle$ の type の，＋に相当する functional が定義できる．かんたんのためこれを再び＋と書く．この意味は，s と t が type σ の term，σ の型が $(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ が各々 type $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ の自由変数のとき，$(s+t)\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle = s\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle + t\langle\alpha_1, \cdots, \alpha_n\rangle$ となることであり，補助定理 2 から右辺はふつうの＋である．$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ は実は任意の，しかるべき type の term でよい．

type $\sigma\langle\sigma, \sigma\rangle$ の＋の構成は σ の degree に関する帰納法による．σ が 0 ならばふつうの＋をとればよい．σ が $\eta\langle\tau\rangle$ のとき，type σ の α と β，type τ

の γ について，$\alpha\langle\gamma\rangle$ と $\beta\langle\gamma\rangle$ は type η であるから，帰納法の仮定により $\alpha\langle\gamma\rangle+\beta\langle\gamma\rangle$ はすでに定義できており，したがって適当な type の φ, ψ, χ により $\lambda\varphi\lambda\psi\lambda\chi(\varphi\langle\chi\rangle+\psi\langle\chi\rangle)$ は type σ の primitive recursive な functional である．これを type $\sigma\langle\sigma,\sigma\rangle$ の＋と定義する．s と t が type σ ならば，

$$s+t=\lambda\chi(s\langle\chi\rangle+t\langle\chi\rangle).$$

η の型が $(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$，$\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ の type が各々 $\tau,\sigma_1,\cdots,\sigma_n$ ならば，

$$(s+t)\langle\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=(s\langle\gamma\rangle+t\langle\gamma\rangle)\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=s\langle\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle+t\langle\gamma,\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle.$$

ここに第二の等式は帰納法の仮定により成立する．

他の functional についても同様のことがいえる．

§4. HA の T への帰着

4·1 quantifier-free reduction

$S:\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m\to\Theta,\mathfrak{B},\Lambda$ が HA の式で，右辺では $\mathfrak{B}$ のみが quantifier をもつとき，その Gödel interpretation S^G を次のようにあらわすことにする：$\exists\mathfrak{x}_1\forall\mathfrak{y}_1A_1(\mathfrak{x}_1,\mathfrak{y}_1),\cdots,\exists\mathfrak{x}_m\forall\mathfrak{y}_mA_m(\mathfrak{x}_m,\mathfrak{y}_m)\to\Theta^G,\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{v}B(\mathfrak{u},\mathfrak{v}),\Lambda^G$，ここで $\mathfrak{B}$ は実際にはあらわれないかもしれず，$\mathfrak{A}_1,\cdots,\mathfrak{A}_m$ の中で quantifier をもたないものがあるかもしれないが，一様に上記のように書くことにする．Θ^G, Λ^G は，Θ,Λ の中の＋と・を T の functional である＋と・(3·6) で置き換えたものである．

S が与えられているとき，$\mathfrak{s}_1,\cdots,\mathfrak{s}_m,\mathfrak{t}$ が，適当な type の，高々 S にあらわれる自由変数のみを含むような term の列であり，$\mathfrak{f}_1,\cdots,\mathfrak{f}_m,\mathfrak{g}$ が適当な type の S にあらわれない自由変数の列で，この中にあらわれる変数はすべて互いに異なり，$\mathfrak{f}$ が $\mathfrak{f}_1,\cdots,\mathfrak{f}_m$ 全体をあらわすとするとき，S^G を変形して得られる quantifier-free な式

$$S':A_1(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{g}\rangle),\cdots,A_m(\mathfrak{f}_m,\mathfrak{s}_m\langle\mathfrak{f},\mathfrak{g}\rangle)\to\Theta^G,B(\mathfrak{t}\langle\mathfrak{f}\rangle,\mathfrak{g}),\Lambda^G$$

を，S の quantifier-free な形という．$\mathfrak{f},\mathfrak{g}$ の各自由変数を S' の eigenvairable といい，S にもともと入っている自由変数と区別する．また，たとえば $\mathfrak{f}_1$ を，

$\mathfrak{A}_1$ の，あるいは A_1 の eigenvairable などという言い方もする．S' の形は，→ を ⊢ と思って S を解釈すれば，自然に得られる．S' は明らかに T の式であり，predicate は type 0 の＝のみ，eigenvairable 以外の自由変数は S にあらわれるもののみ，ゆえに type 0 である．S' の中でたとえば，'s_1 は $\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{g}$ を変数としてもつ' という．他の term についても同様である．

このような設定のもとで，いま S が HA で provable なとき，もし S' が T で provable ならば，S' を S の quantifier-free reduction という．HA で provable な S について，S の quantifier-free な形の中で意味のあるのは，quantifier-free reduction だけである．本章の主要定理は次のように述べられる．

4·2 S が HA で provable な式のとき，少なくとも一つ S の quantifier-free reduction が存在する．[Gödel]

3·1 で説明した Gödel の結果は，この定理の特別な場合，S が →$\mathfrak{B}$ のときである．以下この定理の証明が主要な目的だが，まず無矛盾性に関する結論を明確にしておこう．

4·3 結　　論

NN の無矛盾性は T の無矛盾性に帰着される．

すなわち，もし NN で → が provable ならば，1·9 により HA で → が provable，したがって，4·2 により → が T で provable. ゆえに，もしT が無矛盾ならば NN は無矛盾である．言い換えれば，primitive recursive な functional の理論を基本的なものとして認めるならば，NN の無矛盾性が保証されるわけである．

4·4 注意事項

1) 4·2 の定理の自由変数に関する条件を次のように変更してもよい：

4·2 の $\mathfrak{s}_1, \cdots, \mathfrak{s}_m$, t は S にあらわれる以外の自由変数を含むかもしれないが，それらは $\mathfrak{f}, \mathfrak{g}$ のいずれの自由変数とも異なる．

なぜなら，もし α が S にない自由変数として S' にあらわれれば，α と同じ type の primitive recursive な functional が存在する (3·11) から，S'

の証明中 α を各所でその functional によって置きかえても T の証明図が得られる (3·4)．ゆえに，このような置き換えを S にあらわれず eigenvariable でもない自由変数すべてについて行なえば，その結果得られる式は定理の条件を満たす．定理の証明はこの拡張した形で行なう．

2)　$s=t$ が T で provable ならば T の任意の formula $F(\alpha)$ について，$F(s)\to F(t)$ も $F(t)\to F(s)$ も T で provable である．

これは 3·5 より明らか．したがってこのような s と t については，各式の中で自由に交換してよい．

4·5　定理の証明を始める．証明は S に至る HA の証明図が与えられているとして，それに含まれる推論図の個数に関する帰納法による．実は前章の Gentzen の方法と異なり，ここでは Gentzen 流の証明の形式化が特に有利なわけではない．しかしこの種の形式化に慣れてしまったので，それで通すことにする．

1)　S が HA の始式ならば，quantifier-free な formula のみから成ると仮定しているから，＋と・に関する公理以外は明らかである．＋と・については，3·6 で必要な等式が証明された (HA の始式については 1·1 を参照のこと)．たとえば HA の始式

$$\to s+t'=(s+t)'$$

は，変形により

$$\to s^*+(t^*)'=(s^*+t^*)'$$

となる．ただし後の式の＋は 3·6 で定義された $t, \lambda z\rho[z, \lambda y\lambda x x']$ であるが，s^* も t^* も type 0 であるから 3·6 で $a=s^*, n=t^*$ とすれば

$$\to a+n'=(a+n)',$$

すなわち，

$$\to s^*+(t^*)'=(s^*+t^*)'$$

が，T で provable である．他の式についても同様である．

以下 I を S の証明図の最後の推論とし，I の上式については定理が成り立っていると仮定する．

2) I が減，左：$\dfrac{\mathfrak{D}, \mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}{\mathfrak{D}, \Gamma \to \Delta}$ で，$\mathfrak{D}$ が quantifier を含む場合．

$\mathfrak{D}^G$：$\exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} D(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ とする．上式の reduction.

（1） $D(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{s}_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$，$D(\mathfrak{f}_2, \mathfrak{s}_2\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$，$\Gamma^* \to \Delta^*$

が T で provable, ただし Γ^*, Δ^* は Γ, Δ の quantifier-free な形を略記したもの．かんたんのため $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}$ をすべて同一視する．$D(\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$ は T の formula であるから，その表現函数 χ が存在する．これにより次の二つの式が T で provable になるような term の列 $\mathfrak{r}$ が定義できる：

（2） $\neg D(\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle) \to D(\mathfrak{f}, \mathfrak{r}\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle) \vdash\!\dashv D(\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$,

（3） $D(\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle) \to D(\mathfrak{f}, \mathfrak{r}\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle) \vdash\!\dashv D(\mathfrak{f}, \mathfrak{s}_2\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$.

$\mathfrak{r}$ は次の手順で定義される．まず

$$\bar{\chi}\langle \mathfrak{a}\rangle = \overline{sg}(\chi\langle \mathfrak{a}\rangle)$$

となるような $\bar{\chi}$ は primitive recursive な functional として定義され，

$$\bar{\chi}\langle \mathfrak{a}\rangle = 0 \to \bar{\chi}\langle \mathfrak{a}\rangle = 1,$$
$$\bar{\chi}\langle \mathfrak{a}\rangle = 1 \to \bar{\chi}\langle \mathfrak{a}\rangle = 0$$

が T で provable である．$\mathfrak{D}$ にあらわれる自由変数の列を $\mathfrak{b}$ とすると，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{f}, \mathfrak{h}, \mathfrak{b}$ から成る．$\mathfrak{s}_1$ の一つの term s_1 を考えよう．その type を $\eta = \tau\langle \sigma_1, \cdots, \sigma_n\rangle$ とする．ただし $\sigma_1, \cdots, \sigma_n$ は $(\mathfrak{f}, \mathfrak{h})$ の各変数の type とする．$\chi\langle \mathfrak{a}\rangle$ は type 0 であるから，3·11 により対応する type τ の term を定義できる．しかも 3·11 の構成方法から，その結果に含まれる自由変数はちょうど $\mathfrak{a}$ である．それを $\chi^*(\mathfrak{a})$ と書くならば，$\chi^\eta = \lambda \mathfrak{x} \chi^*(\mathfrak{x}, \mathfrak{b})$ は type η の term となる．ここで $\mathfrak{x}$ は $\mathfrak{f}$ と $\mathfrak{h}$ に対応する．同様に $\bar{\chi}$ を type η にした $\bar{\chi}^\eta$ が定義される．同じく 3·11 から，＋ や・を任意の type に上げることができるから，s_2 を s_1 に対応する $\mathfrak{s}_2$ の term とするとき，$r = s_1 \cdot \chi^\eta + s_2 \cdot \bar{\chi}^\eta$ が定義できる．このような r の列を $\mathfrak{r}$ と書く．いま言いたいことは，

（4） $$r\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle = \begin{cases} s_1\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle & \chi\langle \mathfrak{a}\rangle = 1 \text{ のとき}, \\ s_2\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle & \chi\langle \mathfrak{a}\rangle = 0 \text{ のとき}, \end{cases}$$

である．そうすれば χ の定義から

$$\mathfrak{r}\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle=\begin{cases}\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle & \neg D(\mathfrak{f},\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle)\ \text{のとき,}\\ \mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle & D(\mathfrak{f},\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle)\ \text{のとき,}\end{cases}$$

が T で provable となる．したがって上記の二式が provable．（1）—（3）より，

$$D(\mathfrak{f},\mathfrak{r}\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle),\ \ \Gamma^*\to\Delta^*$$

が provable．これは I の下式の quantifier-free reduction となっている．

（4）の証明は，χ^η の作り方から

$$\chi^\eta\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle=\chi^*(\mathfrak{a})$$

で，$\chi^*(\mathfrak{a})$ の定義から適当な $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ について，

$$\chi^*(\mathfrak{a})\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=1.$$

同様に

$$\bar{\chi}^*(\mathfrak{a})\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle=0.$$

ゆえに，

$$\begin{aligned}r\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle&=(s_1\cdot\chi^\eta+s_2\cdot\bar{\chi}^\eta)\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle\\&=s_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle\cdot\chi^\eta\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle\\&\quad+s_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle\cdot\bar{\chi}^\eta\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle\end{aligned}$$

となり，$\chi\langle\mathfrak{a}\rangle=1$ のときは $\bar{\chi}\langle\mathfrak{a}\rangle=0$ であるからこの式は

$$=s_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\alpha_1,\cdots,\alpha_n\rangle$$

となる．これより，適当な束縛変数の列 $\mathfrak{y}$ により，

$$r\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle=\lambda\mathfrak{y}s_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h},\mathfrak{y}\rangle=s_1\langle\mathfrak{f},\mathfrak{h}\rangle.$$

ここで最後の等式は T の始式の一つによる．$\chi\langle\mathfrak{a}\rangle=0$ のときも同様にして，（4）が証明される．

3） I が三段論法：$\dfrac{\Gamma\to\Delta,\mathfrak{D}\qquad\mathfrak{D},\Pi\to\Lambda}{\Gamma,\Pi\to\Delta,\Lambda}$ で，$\mathfrak{D}$ が quantifier を含む場合．このとき Δ は quantifier-free であることに注意． 帰納法の仮定により上式の quantifier-free reduction

（1） $$\Gamma^*\to\Delta^{\mathrm{G}},\ \ D(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{g})$$

と

（2） $$D(\mathfrak{f},\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{k}\rangle),\ \ \Pi^*\to\Lambda^*$$

が T で provable. $\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle$ を（2）の $\mathfrak{f}$ に，$\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{k}\rangle$ を（1）の $\mathfrak{h}$ に代入した結果

（3） $$\Gamma^{**}\to\Delta^{G},\ D(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{k}\rangle)$$

と

（4） $$D(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{k}\rangle),\ \Pi^{**}\to\Lambda^{**}$$

は T で provable である．さらに（3）の $\mathfrak{f}$ に $\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle$ を代入すると，$\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{f},\mathfrak{k}\rangle$ が $\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{k}\rangle$ となり

(3′) $$\Gamma^{***}\to\Delta^{G},\ D(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{s}_2\langle\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{h}\rangle,\mathfrak{k}\rangle)$$

を得る．これも T で provable である．(3′) と（4）から三段論法で

（5） $$\Gamma^{***},\ \Pi^{**}\to\Delta^{G},\ \Lambda^{**}$$

が T で provable である．これが I の下式の quantifier-free reduction となっていることをいうためには，この式が下式の Gödel interpretation と，しかるべき関係にあることをいえばよい．

かんたんのため Γ を $\mathfrak{C}$, Π を $\mathfrak{A}$, Λ を $\mathfrak{B}$, Δ を空とする．Δ は quantifier を含まないので，これによって一般性を失うことはない．$\mathfrak{C}^{G}$: $\exists x'\forall y'C(x',y')$, $\mathfrak{A}^{G}$: $\exists u\forall vA(u,v)$, $\mathfrak{B}^{G}$: $\exists w\forall zB(w,z)$ とする．ここで $x',y',\cdots$ などは別に type 0 に限らない，適当な type の束縛変数を意味する．また quantifier は各種一つずつとする．下式は $\Gamma,\Pi\to\Lambda$ であるから，その Gödel interpretation は

$$\exists x'\forall y'C(x',y'),\ \exists u\forall vA(u,v)\to\exists w\forall zB(w,z),$$

ゆえに適当な type の term p,q,l で h と $\mathfrak{k}$ を含まないものが存在し，$\mathfrak{k}$ が k_1 と k_2 から成るとすれば，

（6） $$C(h,p\langle h,k_1,k_2\rangle),\ A(k_1,q\langle h,k_1,k_2\rangle)\to B(l\langle h,k_1\rangle,k_2)$$

が T で provable になればよい．（5）がこの条件を満たすことをいえばよい．（1）を書き直すと，適当な r により

$$C(h,r\langle h,g\rangle)\to D(s_1\langle h\rangle,g).$$

（2）は適当な s と t により

$$D(f,s_2\langle f,k_1,k_2\rangle),\ A(k_1,s\langle f,k_1,k_2\rangle)\to B(t\langle f,k_1\rangle,k_2).$$

ゆえに (3′) は

$$C(h, r\langle h, s_2\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle\rangle) \to D(s_1\langle h\rangle, s_2\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle),$$

(4) は

$$D(s_1\langle h\rangle, s_2\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle),\ \ A(k_1, s\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle) \to B(t\langle s_1\langle h\rangle, k_1\rangle, k_2),$$

(5) は

$$C(h, r\langle h, s_2\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle\rangle),\ \ A(k_1, s\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle) \to B(t\langle s_1\langle h\rangle, k_1\rangle, k_2).$$

わかりやすいように自由変数をそのまま λ で束縛して p, q, l を次のように定義する：

$$p = \lambda h\lambda k_1\lambda k_2 r\langle h, s_2\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle\rangle\,;$$

$$q = \lambda h\lambda k_1\lambda k_2 s\langle s_1\langle h\rangle, k_1, k_2\rangle\,;$$

$$l = \lambda h\lambda k_1 t\langle s_1\langle h\rangle, k_1\rangle.$$

これらにより (6) が provable になることは (5) より明らか．

4)　I が ⅂右：$\dfrac{\mathfrak{A}, \Gamma \to \Delta}{\Gamma \to \Delta, \neg\mathfrak{A}}$ で，$\mathfrak{A}$ が quantifier をもつ場合，$\mathfrak{A}^G$ を $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ とすると $(\neg\mathfrak{A})^G$ は $\exists\mathfrak{z}\forall\mathfrak{x}\neg A(\mathfrak{x}, \mathfrak{z}\langle\mathfrak{x}\rangle)$．帰納法の仮定により

(1)　　　$A(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f}\rangle), \Gamma^* \to \Delta^G$

が T で provable. (1) から T の ⅂：右で，

(2)　　　$\Gamma^* \to \Delta^G, \neg A(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f}\rangle)$.

$\mathfrak{f}$ は A の eigenvariable と Γ^* の eigenvariable $\mathfrak{h}$ から成る．ゆえに (2) を書き換えて

$$\Gamma^* \to \Delta^G,\ \ \neg A(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle)$$

とすれば，これは下式の quantifier-free reduction になっている．

5)　I が ∨ 右：$\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}}{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}}$ で，$\mathfrak{A}$ も $\mathfrak{B}$ も quantifier を含む場合．$\mathfrak{A}^G$ を $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$，$\mathfrak{B}^G$ を $\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{v}B(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ とすると，$(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})^G$ は $\exists x\exists\mathfrak{x}\exists\mathfrak{u}\forall\mathfrak{y}\forall\mathfrak{v}((x=0\wedge A(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}))\vee(\neg x=0\wedge B(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})))$．帰納法の仮定により上式の reduction

$$\Gamma^* \to \Delta^G,\ \ A(\mathfrak{s}\langle\mathfrak{f}\rangle, \mathfrak{g})$$

が T で provable, $\mathfrak{z}$ を $\mathfrak{f}$ に対応する束縛変数の列とし, t を $\lambda\mathfrak{z}\,0$ とすると, $t\langle\mathfrak{f}\rangle=0$ が T で provable であるから "またはの記号"

$$\Gamma^* \to \Delta^G, (t\langle\mathfrak{f}\rangle=0 \wedge A(\mathfrak{s}\langle\mathfrak{f}\rangle, \mathfrak{g})) \vee (\neg t\langle\mathfrak{f}\rangle=0 \wedge B(\mathfrak{s}\langle\mathfrak{f}\rangle, \mathfrak{h}))$$

が T で provable となる.

6) I が∀左 : $\dfrac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Delta}{\forall x\mathfrak{F}(x), \Gamma \to \Delta}$ のとき, $(\mathfrak{F}(a))^G$ を $\exists\mathfrak{x}\forall\mathfrak{y}F(a, \mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ とすると, $(\forall x\mathfrak{F}(x))^G$ は $\exists\mathfrak{z}\forall x\forall\mathfrak{y}F(x, \mathfrak{z}\langle x\rangle, \mathfrak{y})$. 帰納法の仮定により上式の reduction

(1) $\qquad F(t, \mathfrak{f}, \mathfrak{s}\langle\mathfrak{f}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle), \ \Gamma^*(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}\langle\mathfrak{f}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle) \to \Delta^*(\mathfrak{r}\langle\mathfrak{f}, \mathfrak{h}\rangle, \mathfrak{k})$

が T で provable である. ただし $\mathfrak{h}$ は Γ^* の eigenvariable, $\mathfrak{k}$ は Δ^* の eigenvariable, $\Gamma^*(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}\langle\mathfrak{f}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle)$ は Γ^* の各 formula での eigenvariable の入り方をまとめてあらわしたのであるが, Γ^* が一つの formula から成ると思って考えても, 一般性を失わない. Δ^* についても同様である. g を適当な type の新しい自由変数の列とし, $\mathfrak{g}\langle t\rangle$ を $\mathfrak{f}$ に代入すると, (1) から T で provable な式

(2) $\qquad F(t, \mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{s}\langle\mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle), \ \Gamma^*(\mathfrak{h}, \mathfrak{t}\langle\mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle)$

$$\to \Delta^*(\mathfrak{r}\langle\mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{h}\rangle\mathfrak{k},)$$

を得る. $\mathfrak{s}$ に適当に λ をつけて, term $\mathfrak{s}^*$ で

$$\mathfrak{s}\langle\mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle = \mathfrak{f}^*\langle\mathfrak{g}, \mathfrak{k}, \mathfrak{k}\rangle$$

となるものが求められる. ゆえに (2) は

$$F(t, \mathfrak{g}\langle t\rangle, \mathfrak{s}^*\langle\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle), \Gamma^*(\mathfrak{h}, \mathfrak{s}^*\langle\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle) \to \Delta^*(\mathfrak{r}^*\langle\mathfrak{g}, \mathfrak{h}\rangle, \mathfrak{k})$$

となり, 下式の reduction になっている.

7) I が∀右 : $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(a)}{\Gamma \to \Delta, \forall x\mathfrak{F}(x)}$. 帰納法の仮定により

$$\Gamma^* \to \Delta^G, F(a, \mathfrak{s}(a)\langle\mathfrak{f}\rangle, \mathfrak{g})$$

が T で provable, ただし $\mathfrak{s}(a)$ は $\mathfrak{s}$ にあらわれるすべての a を示し, $\mathfrak{f}$ は Γ^* の eigenvariable である. $\mathfrak{s}$ が $s_1, \cdots, s_k$ から成るとき $\mathfrak{s}_0$ を

$$\lambda\mathfrak{u}\lambda x(s_1(x)\langle\mathfrak{u}\rangle), \cdots, \lambda\mathfrak{u}\lambda x(s_k(x)\langle\mathfrak{u}\rangle)$$

と書くと, 上の式から

$$\Gamma^* \to \Delta^G, F(a, \mathfrak{s}_0\langle\mathfrak{f}, a\rangle, \mathfrak{g})$$

が T で provable. これが下式の reduction になっている.

8) I が帰納法：$\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(0) \qquad \mathfrak{F}(a), \Pi \to \Lambda, \mathfrak{F}(a')}{\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, \mathfrak{F}(s)}$ で $\mathfrak{F}(a)$ が quantifier を含む場合. s は a を含まないことに注意. $(\mathfrak{F}(a))^G$ を $\exists \mathfrak{x} \forall \mathfrak{y} F(a, \mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ とする. 帰納法の仮定から

(1)　　$$\Gamma^* \to \Delta^G, F(0, \mathfrak{S}_1\langle \mathfrak{h} \rangle, \mathfrak{g})$$

と

(2)　　$$F(a, \mathfrak{f}, \mathfrak{S}_2(a)\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g} \rangle), \Pi^* \to \Lambda^G, F(a', \mathfrak{S}_3(a)\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{k} \rangle, \mathfrak{g})$$

が T で provable. ここで $\mathfrak{h}$ は Γ^* の eigenvariable, $\mathfrak{k}$ は Π^* の eigenvariable である. $\mathfrak{g}$ は（1）と（2）で同じ type であるので同じ変数を使ってよい. （1）と（2）に明記されている term の列から, 新らしい term の列を次々と定義する. $\mathfrak{S}_1$ の一つの term を s, 対応する $\mathfrak{S}_3$ の term を t とする. r を

$$\rho[\lambda \mathfrak{v}\mathfrak{w}(s\langle \mathfrak{v} \rangle), \lambda x \mathfrak{z} \mathfrak{v}\mathfrak{w}(t(x)\langle \mathfrak{z}\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle, \mathfrak{w} \rangle)]$$

と定義する. $\mathfrak{v}$ は $\mathfrak{h}$ に, $\mathfrak{w}$ は $\mathfrak{k}$ に対応し, $\mathfrak{z}$ はそれによってしかるべき type をもつ. このような r の列を $\mathfrak{t}_0$ とよぶ. これを略記して,

$\mathfrak{t}_0 : \rho[\lambda \mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{S}_1\langle \mathfrak{v} \rangle), \lambda x \mathfrak{z} \mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{S}_3(x)\langle \mathfrak{z}\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle, \mathfrak{w} \rangle)]$

と書く.

$\tilde{\mathfrak{t}}_0 : \lambda x \mathfrak{y} \mathfrak{t}_0\langle x, \mathfrak{h}, \mathfrak{k} \rangle$,

ただし $\mathfrak{y}$ は $\mathfrak{g}$ に対応.

$\mathfrak{S}_0 : \lambda x \mathfrak{v}\mathfrak{w}\mathfrak{y}(\mathfrak{S}_2(x)\langle \mathfrak{t}_0\langle x, \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle, \mathfrak{v}, \mathfrak{y} \rangle)$,

$\tilde{\mathfrak{S}}_0 : \lambda y \mathfrak{y}(\mathfrak{S}_0\langle y, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{y} \rangle)$

ただし, 束縛変数の重複は適当に修正されているものとする. 上の定義から,

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle 0, \mathfrak{g} \rangle &= \mathfrak{t}_0\langle 0, \mathfrak{h}, \mathfrak{k} \rangle \\ &= \rho[\lambda \mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{S}_1\langle \mathfrak{v} \rangle), \lambda x \mathfrak{z} \mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{S}_3(x)\langle \mathfrak{z}\langle \mathfrak{v}, \mathfrak{w} \rangle, \mathfrak{w} \rangle)]\langle 0, \mathfrak{h}, \mathfrak{k} \rangle \\ &= \lambda \mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{S}_1\langle \mathfrak{v} \rangle)\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{k} \rangle = \mathfrak{S}_1\langle \mathfrak{h} \rangle. \end{aligned}$$

この式と（1）から,

(1′)　　$$\Gamma^* \to \Delta^G, F(0, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle 0, \mathfrak{g} \rangle, \mathfrak{g})$$

を得る. （2）の $\mathfrak{f}$ に $\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g} \rangle$ を代入すると

(2′)　　$$F(a, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g} \rangle, \mathfrak{S}_2(a)\langle \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g} \rangle, \mathfrak{k}, \mathfrak{g} \rangle), \Pi^{**}$$

$$\to \Lambda^{G}, F(a', \mathfrak{s}_3(a)\langle \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{k}\rangle, \mathfrak{g})$$

が得られる. Π^* の term で $\mathfrak{f}$ を変数としてもつものは，必ず $\mathfrak{g}$ も変数としてもつ. たとえばそれを $s\langle \mathfrak{f}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}\rangle$ とすると，$\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle$ を $\mathfrak{f}$ に代入した結果，$s\langle \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}\rangle$，を適当に調節して，変数として $\mathfrak{k}$ と $\mathfrak{g}$ をもち，自由変数は s にあるもののみ，という term に変形できる.（s は a を含むと仮定してよい.）

以下の等式はすべて T で provable である.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a', \mathfrak{g}\rangle &= \mathfrak{t}_0\langle a', \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle\\ &= \rho[\lambda\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{v}\rangle), \lambda x\mathfrak{z}\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{s}_3(\mathfrak{x})\langle\mathfrak{z}\langle\mathfrak{v}, \mathfrak{w}\rangle, \mathfrak{w}\rangle)]\langle a', \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle\\ &= \lambda x\mathfrak{z}\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{s}_3(x)\langle\mathfrak{z}\langle\mathfrak{v}, \mathfrak{w}\rangle, \mathfrak{w}\rangle)\langle a, \rho[\mathfrak{s}^*, \mathfrak{t}^*]\langle a\rangle\rangle\langle\mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle\\ &= s_3(a)\langle\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle, \tilde{\mathfrak{k}}\rangle,\end{aligned}$$

ただし $\mathfrak{s}^*$ は $\lambda\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{s}_1\langle\mathfrak{v}\rangle)$ の略，$\mathfrak{t}^*$ は $\lambda x\mathfrak{z}\mathfrak{v}\mathfrak{w}(\mathfrak{s}_3(x)\langle\mathfrak{z}\langle\mathfrak{v}, \mathfrak{w}\rangle, \mathfrak{w}\rangle)$ の略である.

$$\begin{aligned}\tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle &= \mathfrak{s}_0\langle a, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}\rangle\\ &= \mathfrak{s}_2(a)\langle\mathfrak{t}_0\langle a, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}\rangle\\ &= \mathfrak{s}_2(a)\langle\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{k}, \mathfrak{g}\rangle;\end{aligned}$$

$$\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle\rangle = \mathfrak{t}_0\langle a, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle = \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle.$$

ゆえに，

(2″) $\quad F(a, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle\rangle, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle), \Pi^{**} \to \Lambda^{G}, F(a', \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a', \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{g})$

を得る.

$$G(a, \mathfrak{g}) : F(a, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{g})$$

とおけば，

$$\begin{aligned}&G(0, \mathfrak{g}) : F(0, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle 0, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{g}) \quad ((1')\ \text{参照}),\\ &G(a', \mathfrak{g}) : F(a', \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a', \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{g}) \quad ((2'')\ \text{参照}),\\ &G(a, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle) : F(a, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle a, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle\rangle, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a, \mathfrak{g}\rangle)\end{aligned}$$

となり，ゆえに (1′) と (2″) から，

(3) $\quad \Gamma^* \to \Lambda^{G}, G(0, \mathfrak{g})$

および

(4) $\quad G(a, \tilde{\mathfrak{s}}_0\langle a. \mathfrak{g}\rangle).\ \Pi^{**} \to \Lambda^{G},\ G(a', \mathfrak{g})$

が T で provable である．$G(a, \mathfrak{g})$ に T の帰納法（3.3 の形の）を適用すると，（3）と（4）から，

$$\Gamma^*, \Pi^{**} \to \Delta^{\mathrm{G}}, \Lambda^{\mathrm{G}}, G(s, \mathfrak{g}),$$

すなわち

（5）
$$\Gamma^*, \Pi^{**} \to \Delta^{\mathrm{G}}, \Lambda^{\mathrm{G}}, F(s, \tilde{\mathfrak{t}}_0\langle s, \mathfrak{g}\rangle, \mathfrak{g})$$

が T で provable である．

$$\tilde{\mathfrak{t}}_0\langle s, \mathfrak{g}\rangle = \mathfrak{t}_0\langle a, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle$$

であるから，

$$\mathfrak{r} = \lambda\mathfrak{h}\mathfrak{k}\mathfrak{t}_0\langle s, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle$$

とおくと（5）より

$$\Gamma^*, \Pi^{**} \to \Delta^{\mathrm{G}}, \Lambda^{\mathrm{G}}, F(s, \mathfrak{r}\langle \mathfrak{h}, \mathfrak{k}\rangle, \mathfrak{g}),$$

これが下式の reduction になっている．

他の場合も同様に扱えばよい．これで定理の証明は終る．（終）

4·6　拡張された帰納法の証明

3·3 の命題，拡張された帰納法がTで成り立つこと，をここで証明しよう．問題は，

$$\Gamma \to \Delta, F(0, \mathfrak{b})$$

と

$$F(a, \mathfrak{r}\langle a, \mathfrak{b}\rangle), \Pi \to \Lambda, F(a', \mathfrak{b})$$

が T で provable なとき，

$$\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, F(s, \mathfrak{t})$$

が T で provable なことを示すことである．かんたんのため $\mathfrak{b}$ は b 一つから成るとし，したがって $\mathfrak{r}$ は r, $\mathfrak{t}$ は t とする．ゆえに

（1）
$$\Gamma \to \Delta, F(0, b)$$

と

（2）
$$F(a, r\langle a, b\rangle), \Pi \to \Lambda, F(a', b)$$

が T で provable とする．term

$$\lambda y(\rho[t, \lambda xur\langle s \dot{-} x', u\rangle]\langle s \dot{-} y\rangle)$$

を p と名づける．（1）で b に $p\langle 0\rangle$,（2）で b に $p\langle a'\rangle$ を代入した式も T で provable である：

$$(3)\qquad \Gamma \to \Delta, F(0, p\langle 0\rangle),$$

$$(4)\qquad F(a, r\langle a, p\langle a'\rangle\rangle), \Pi \to \Lambda, F(a', p\langle a'\rangle).$$

また，

$$(5)\qquad a' \leq s \to p\langle a\rangle = r\langle a, p\langle a'\rangle\rangle$$

も T で provable. ただし $a' \leq s$ は $a' \dot{-} s = 0$ の略.（4）と（5）から,

$$(6)\qquad a' \leq s, F(a, p\langle a\rangle), \Pi \to \Lambda, F(a', p\langle a'\rangle).$$

（3）から,

$$(7)\qquad \Gamma \to \Delta, 0 \leq s \supset F(0, p\langle 0\rangle)$$

を得,（6）と $a' \leq s \to a \leq s$ から

$$(8)\qquad a \leq s \supset F(a, p\langle a\rangle), \Pi \to \Lambda, a' \leq s \supset F(a', p\langle a'\rangle)$$

を得る. $a \leq s \supset F(a, p\langle a\rangle)$ を $G(a)$ とすれば,（7）と（8）から,

$$\Gamma \to \Delta, G(0)$$

と

$$G(a), \Pi \to \Lambda, G(a')$$

を得る. ゆえに T の帰納法が適用でき,

$$\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, G(s),$$

すなわち

$$\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, s \leq s \supset F(s, p\langle s\rangle)$$

を得る. $p\langle s\rangle = t$ であり, $s \leq s$ は provable であるから, これより

$$\Gamma, \Pi \to \Delta, \Lambda, F(s, t)$$

を得る.（終）

§ 5. Gödel interpretation についての考察

この節では, HA の有限な type への拡張で, Gödel interpretation について完全な体系を考える. すなわち, その体系で, Gödel interpretation がもとの formula と同値であることが, 形式的に証明されるのである.

5·1 $\mathfrak{S}$ の定義

有限な type をもつ算術の体系 $\mathfrak{S}$ は，T を quantifier-free な部分体系として含むもので，次のように定義される．

1) $\mathfrak{S}$ の記号は T の記号と，各 type の $\forall$ と $\exists$ から成る．$\mathfrak{S}$ の formula は 3·7 で定義された $\mathscr{T}$ の formula 全体である．すなわち，各 type の $s=t$ の形のものを atomic formula とし，次々論理記号を加えて定義され，その際各 type の quantifier を許す．ゆえに $\forall\varphi\mathfrak{F}(\varphi)$ や $\exists\varphi\mathfrak{F}(\varphi)$ の形があらわれる．

2) $\mathfrak{S}$ の式は HA の式のように定義される：$\mathfrak{S}$ の式は $\mathfrak{S}$ の formula から成り，右辺の式の formula のうち quantifier を含むものは高々一つである．

3) $\mathfrak{S}$ の始式は T の始式と同じ．推論規則は HA のもののほかに，有限の type の quantifier に関する推論が必要である：

$\forall$左 $\dfrac{\mathfrak{F}(t), \Gamma \to \Delta}{\forall\varphi\mathfrak{F}(\varphi), \Gamma \to \Delta}$　　$\forall$右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(\alpha)}{\Gamma \to \Delta, \forall\varphi\mathfrak{F}(\varphi)}$

$\exists$左 $\dfrac{\mathfrak{F}(\alpha), \Gamma \to \Delta}{\exists\varphi\mathfrak{F}(\varphi), \Gamma \to \Delta}$　　$\exists$右 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{F}(t)}{\Gamma \to \Delta, \exists\varphi\mathfrak{F}(\varphi)}$

ただし，φ は α または t と同じ type で $\mathfrak{F}(\alpha)$ にあらわれない任意の束縛変数，t は任意の term，α は下式にあらわれない自由変数である．

選択公理 $\dfrac{\Gamma \to \Delta, \forall\varphi\exists\psi\mathfrak{F}(\varphi, \psi)}{\Gamma \to \Delta, \exists\chi\forall\varphi\mathfrak{F}(\varphi, \chi\langle\varphi\rangle)}$

選択公理とは，任意の φ について対応する ψ の存在が保証されているとき，その対応が φ の函数 χ の値としてとれることをいう．

次の推論を提示する前に，よく使われる用語を導入しておく．formula $\mathfrak{A}$ が $\forall\varphi_1\cdots\forall\varphi_m A(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ の形で，A が quantifier-freeなとき，$\mathfrak{A}$ が $\forall$の prenex form である，という．$\mathfrak{A}$ が $\exists\varphi_1\cdots\exists\varphi_m A(\varphi_1, \cdots, \varphi_m)$ の形ならば，$\mathfrak{A}$ が$\exists$の prenex form であるという．

$\exists\vdash$　　$\mathfrak{A}$ が$\forall$の prenex form であるとき，$\dfrac{\Gamma \to \Delta, \mathfrak{A}\vdash\exists\varphi B(\varphi)}{\Gamma \to \Delta, \exists\varphi(\mathfrak{A}\vdash B(\varphi))}$.

ヨ7　$\mathfrak{A}(\varphi)$ が ∀の prenex form であるとき，$\dfrac{\Gamma \to \Delta,\ \neg\forall\varphi\mathfrak{A}(\varphi)}{\Gamma \to \Delta,\ \exists\varphi\neg\mathfrak{A}(\varphi)}$.

帰納法は 3·3 で与えられた，拡張した形で入れる．

4)　3) の始式と推論によって，他の体系と同様に，証明図が定義される．

5·2　$\mathfrak{S}$ の reduction

3·7 と同様に，$\mathfrak{S}$ の formula の Gödel interpretation が定義できる．ただし $\mathfrak{S}$ には＋や・がなく，したがって $\mathfrak{S}$ の term はすべてそのまま，すなわち term の変形はなされない．また有限の type の＝はそのままである．言い換えれば，$s=t$ の Gödel interpretation はそれ自身，したがって quantifier-free な formula の Gödel interpretation はそれ自身である．定義から，$\mathfrak{S}$ の formula の Gödel interpretation が，再び $\mathfrak{S}$ の formula になっていることは明らかである．

体系 T を次のように拡張しよう．T の記号のほかに，各 type σ について type $0\langle\sigma,\sigma\rangle$ の primitive recursive な functional の記号 π^σ を導入し，したがって term や formula も π^σ を含んでよいとする．始式は T のもののほかに，π^σ に関する公理を加える：s と t が type σ の任意の term であるとき，

$$\to \pi^\sigma\langle s,t\rangle=0,\ \ \pi^\sigma\langle s,t\rangle=1,$$

$$s=t \to \pi^\sigma\langle s,t\rangle=0,$$

$$\pi^\sigma\langle s,t\rangle=0 \to s=t.$$

この公理からわかるように，π^σ は type σ の ＝ の表現函数の形式化である．推論はもとの T の推論のみである．

このように拡張された体系を再び T とよぶことにする．このとき 4·2 と全く同様にして，体系 $\mathfrak{S}$ の，T への reduction が行なわれる．すなわち，S が $\mathfrak{S}$ で provable な式ならば，その quantifier-free な形で，T で provable なものが存在する．証明は 4·5 と全く平行して行なわれる．ただし，もとの式に＋や・がなく，S の始式はすべてTの始式であるから，始式に関しては何もしなくてよい．また，π^σ が type σ の＝の表現函数となるので，4·5 の 2) で必要な r は，前と同様の手続きで定義できる．

$\mathfrak{S}$に関する詳細はこの章の意図の範囲外であるから省くが，上の事項の結論として，（拡張された）primitive recursive な functional の体系は，$\mathfrak{S}$ の解釈をするに十分である，と言える．したがって特に選択公理の図式でφおよびψ が primitive recursive な functional を値としてとるものならば，χ も primitive recursive な functional としてとれるのである．

5·3 $\vdash$ の解釈

$\mathfrak{S}$ が Gödel interpretation に関して完全であることを，以下に示すが，その前に 3·1 でふれた$\vdash$ の解釈について，ここでもう少しはっきりさせる．話をかんたんにするため，$\mathfrak{B}$ の Gödel interpretation が $\exists x \forall y B(x, y)$，$\mathfrak{C}$ の Gödel interpretation が $\exists u \forall v C(u, v)$ とし，$\mathfrak{A}$ が $\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{C}$ とする．$\mathfrak{A}^G$ は $\exists \varphi \exists \chi \forall x \forall v(B(x, \chi\langle x, v\rangle) \vdash C(\varphi\langle x\rangle, v))$ であるが，これを得るため，$\mathfrak{B}^G \vdash \mathfrak{C}^G$ から出発する．3·1 の説明の手続きを踏むと，$\mathfrak{B}^G \vdash \mathfrak{C}^G$ は，'x に u を対応させる functional の存在' を主張する命題であるから，

$$\exists \varphi \forall x(\forall y B(x, y) \vdash \forall v C(\varphi\langle x\rangle, v))$$

と同等である．

次に，$\forall y B(x, y) \vdash \forall v C(\varphi\langle x\rangle, v)$ は，'$C(\varphi\langle x\rangle, v)$ の反例に $B(x, y)$ の反例を対応させる functional の存在' を主張する命題とみなせるから，

$$\exists \psi \forall v(\neg C(\varphi\langle x\rangle, v) \vdash \neg B(x, \psi\langle v\rangle))$$

と同等である．$\neg C(\varphi\langle x\rangle, v) \vdash \neg B(x, \psi\langle v\rangle)$ は対偶をとって，$B(x, \psi\langle v\rangle) \vdash C(\varphi\langle x\rangle, v)$ となるので，以上の結果を総合して，$\mathfrak{B}^G \vdash \mathfrak{C}^G$ は

$$\exists \varphi \forall x \exists \psi \forall v(B(x, \psi\langle v\rangle) \vdash C(\varphi\langle x\rangle, v))$$

と同等である．これに選択公理を適用して，

$$\exists \varphi \exists \chi \forall x \forall v(B(x, \chi\langle x, v\rangle) \vdash C(\varphi\langle x\rangle, v))$$

となる．これは $\mathfrak{A}^G$ である．

5·4 $\mathfrak{S}$ の任意の formula $\mathfrak{D}$ について，$\mathfrak{D} \longmapsto \mathfrak{D}^G$ が $\mathfrak{S}$ で provable である．すなわち，Gödel interpretation がもとの formula の意味を変えないことが，$\mathfrak{S}$ で形式的に provable なのである．

（証明）$\mathfrak{D}$ の degree に関する帰納法による．$\mathfrak{D}$ は quantifier を含むとす

る.

1)　$\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B}$. かんたんのため $\mathfrak{A}^G$が$\exists\varphi\forall\psi A(\varphi,\psi)$, $\mathfrak{B}^G$が$\exists\chi\forall\eta B(\chi,\eta)$ の形とする. $\mathfrak{D}^G$ は

$$\exists x\exists\varphi\exists\chi\forall\psi\forall\eta((x=0\wedge A(\varphi,\psi))\vee(\neg x=0\wedge B(\chi,\eta))).$$

帰納法の仮定により, $\mathfrak{D}^G \mapsto \mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G$を証明すれば十分である. $\mathfrak{D}^G\to\mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G$のほうを扱おう.

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ a=0\wedge A(\alpha,\beta)\to A(\alpha,\beta)\end{matrix}\qquad\begin{matrix}\vdots\\ a=0,\ \neg a=0\wedge B(\gamma,\delta)\to\end{matrix}}{a=0,\ (a=0\wedge A(\alpha,\beta))\vee(\neg a=0\wedge B(\gamma,\delta))\to A(\alpha,\beta)}$$

より

$$(1)\quad a=0,\ \exists\varphi\exists\chi\forall\psi\forall\eta((a=0\wedge A(\varphi,\psi))\vee(\neg a=0\wedge B(\chi,\eta)))\to\mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G$$

を得る. 同様に

$$(2)\quad \neg a=0,\ \exists\varphi\exists\chi\forall\psi\forall\eta((a=0\wedge A(\varphi,\psi))\vee(\neg a=0\wedge B(\chi,\eta)))\to\mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G.$$

$$\dfrac{\dfrac{(1)\qquad\qquad(2)}{a=0\vee\neg a=0,\ \exists\varphi\exists\chi\forall\psi\forall\eta((a=0\wedge A(\varphi,\psi))\vee(\neg a=0\wedge B(\chi,\eta)))\to\mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G}\qquad \to a=0\vee\neg a=0}{\mathfrak{D}^G\to\mathfrak{A}^G\vee\mathfrak{B}^G}$$

2)　$\mathfrak{D}$ が $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{B}$. $\mathfrak{A}^G$ と $\mathfrak{B}^G$ は 1) のとおりとする. 以下の七つの formula がすべて $\mathfrak{S}$ で同値であることがいえればよい.

(1)　$\exists\varphi\forall\psi A(\varphi,\psi)\vdash\exists\chi\forall\eta B(\chi,\eta)$

(2)　$\forall\varphi(\forall\psi A(\varphi,\psi)\vdash\exists\chi\forall\eta B(\chi,\eta))$

(3)　$\forall\varphi\exists\chi(\forall\psi A(\varphi,\psi)\vdash\forall\eta B(\chi,\eta))$

(4)　$\forall\varphi\exists\chi\forall\eta(\forall\psi A(\varphi,\psi)\vdash B(\chi,\eta))$

(5)　$\forall\varphi\exists\chi\forall\eta\exists\psi(A(\varphi,\psi)\vdash B(\chi,\eta))$

(6)　$\exists\chi\forall\varphi\forall\eta\exists\psi(A(\varphi,\psi)\vdash B(\chi\langle\varphi\rangle,\eta))$

(7)　$\exists\chi\exists\Psi\forall\varphi\forall\eta(A(\varphi,\Psi\langle\varphi,\eta\rangle)\vdash B(\chi\langle\varphi\rangle,\eta))$

(2)→(3) には∃⊢を適用，(4)→(5) には∃¬を適用する．(4)→(5) の証明は下につける．(5)→(6) と (6)→(8) は選択公理の適用により得られる．他は明らかである．

(4)→(5)　$A(\varphi)$ が∀の prenex formで，B が quantifier-free のとき，

$$\forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B)$$

が，provable のことをいえばよい．

$$(8)\quad \begin{array}{c} \neg A(\alpha),\, A(\alpha) \rightarrow B \\ \hline \neg A(\alpha) \rightarrow A(\alpha)\vdash B \\ \hline \neg A(\alpha) \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B) \\ \hline \neg A(\alpha),\, \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B) \\ \hline \exists\varphi\neg A(\varphi),\, \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{c} \forall\varphi A(\varphi),\ \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow B \\ \hline \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow B,\ \neg\forall\varphi A(\varphi) \\ \hline (\exists\neg)\quad \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow B,\ \exists\varphi\neg A(\varphi) \end{array} & (8) \\ \hline \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B),\, B & B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B) \\ \hline \forall\varphi A(\varphi)\vdash B \rightarrow \exists\varphi(A(\varphi)\vdash B) & \end{array}$$

$\mathfrak{D}$ の一番外の論理記号が他のものでも，同様にして証明される．（終）

5·4 の命題により，Gödel interpretation は formula の $\mathfrak{S}$ の中での同値な変形である．これは Gödel interpretation が $\mathfrak{S}$ の中で定義される，といってもよい．この事実は，また，$\mathfrak{S}$ が Gödel interpretation に関して完全である，とも表現される．

§ 6. 種々な理論の間の相互関係

第2章と第3章でNN，最初の ε 数 (ε_0) までの順序数の理論，HA，T，$\mathfrak{S}$，などの体系を定義し，ある体系が他より強いことを明らかにした．ここで体系 $\mathfrak{S}_1$ が体系 $\mathfrak{S}_2$ より強いというのは，$\mathfrak{S}_2$ の無矛盾性が $\mathfrak{S}_1$ の無矛盾性に帰着される，換言すれば，$\mathfrak{S}_1$ が無矛盾ならば $\mathfrak{S}_2$ もそうである，ということである．(より強い，というのは厳密な意味でなく，逆が成り立つ場合も認める．) $\mathfrak{S}_1$ が $\mathfrak{S}_2$ より強いことを主張するためには，$\mathfrak{S}_2$ が $\mathfrak{S}_1$ の一部であることを示すか，$\mathfrak{S}_2$ の $\mathfrak{S}_1$ への飜訳を定義し，その意味で $\mathfrak{S}_2$ が $\mathfrak{S}_1$ の一部になっていることを示すか，あるいは，直接 $\mathfrak{S}_2$ の無矛盾性の証明を $\mathfrak{S}_1$ を使って行なうかすれ

ばよい．このような，異なった理論体系の間の関係をもう少し整理してみよう．ただし，証明その他の詳細はこの章の範囲を出るので省略する．以下のことは，お話と思ってほしい．

今まで知られている事実を列挙すると：

1)　NN と HA は同等である，すなわち同じ強さである．

HA は NN の一部であり，NN の HA への飜訳は 1·8 で証明された．

2)　最初の ε 数（ε_0）までの超限順序数の理論（序論参照）は NN より強い．

NN の無矛盾性が ε_0 までの超限帰納法を使って証明された（第２章）からである．もう少し事情をはっきりさせると，序論で展開された最初の ε 数までの超限順序数論は，順序数の構成・順序数間の＝と順序の定義，その順序に関する超限帰納法という公理から成る．第２章では NN の各証明図に ε_0 より小さい順序数を対応させ，NN の無矛盾性を ε_0 までの順序数論の無矛盾性，すなわち ε_0 までの超限帰納法の妥当性に帰着させた．

3)　T は NN より強い．

これは本章の主な結果である．

4)　ε_0 より小さい任意の順序数 α について，α までの超限帰納法が，NN の中で証明される，すなわち，本質的には数学的帰納法に帰着させられる．

Gentzen によって実際に α までの超限帰納法が NN の中で構成された．

5)　ε_0 までの超限帰納法は，NN で証明不可能である．

Gentzen は，α までの超限帰納法が NN で provable ならば，α は ε_0 より小さいことを，直接に示した．

6)　primitive recursive な functional の存在は，ε_0 までの超限帰納法で証明される．

これは，Gödel が事実として述べており，実際の証明は，Howand，日向などによってなされた．すなわち，primitive recursive な functional が実際に計算可能なこと，言い換えれば，任意の二つの primitive recursive な functional f と g について，$f\langle g\rangle$ が意味をなすとき，$f\langle g\rangle$ の値が一意的に定まることを，ε_0 までの超限帰納法を用いて証明する．

演習問題の解答

第 1 章　§6　(p. 70)

$\mathfrak{A}$ を論理記号を含まない formula とする.

2)　$\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}$ は LJ で provable でない.

$$\because\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\to\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}}\qquad \mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}}{\to\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}}\qquad \dfrac{\dfrac{\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}}{\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}\qquad\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}$$

だから $\mathfrak{A}\vdash\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}\vee\mathfrak{A}$ が LJ で provable ならば, $\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ が LJ で provable となり 1) に反する.

3)　$\neg(\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\vee\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}))\to(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\wedge(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})$ は LJ で provable でない.

$\because$　$\neg(\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\vee\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}))$ を $\mathfrak{B}$ とおく.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}),\mathfrak{A}\to}}{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to\neg\mathfrak{A}}}{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}),\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to}}{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to}\qquad \begin{array}{l}\text{同様に}\\ \neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to\end{array}}{\dfrac{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\vee\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to}{\to\neg(\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\vee\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}))}}$$

即ち　$\to\mathfrak{B}$

$$\dfrac{\dfrac{\to\mathfrak{B}\qquad \mathfrak{A}\to(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\wedge(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}{\to(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\wedge(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}{(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\wedge(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}$$

これは 1) に反する.

4)　$\neg(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}$ は LJ で provable でない.

$$\because\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg\mathfrak{A}\to\neg\mathfrak{A}}{\neg\neg\mathfrak{A},\neg\mathfrak{A}\to}}{\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\neg\mathfrak{A}\to}}{\to\neg(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\neg\mathfrak{A})}\qquad \neg(\neg\mathfrak{A}\wedge\neg\neg\mathfrak{A})\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}{\to\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}$$

これは 1) に反する.

5) $\neg\exists x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\forall x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})$ は LJ で provable でない.

∵
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow}{\exists x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow}}{\rightarrow\neg\exists x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}\qquad \neg\exists x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\forall x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}{\rightarrow\forall x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}$$

∴
$$\dfrac{\rightarrow\forall x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}{\forall x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}}{\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}$$

これは 1) に反する.

6) $\neg\forall x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\exists x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})$ は LJ で provable でない.

但し $\mathfrak{A}$ は x を含まないとする.

∵
$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow}{\forall x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow}}{\rightarrow\neg\forall x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}\qquad \neg\forall x\neg(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow\exists x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}{\rightarrow\exists x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}$$

∴
$$\dfrac{\rightarrow\exists x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\qquad \dfrac{\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}{\exists x(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})\rightarrow(\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A})}}{\rightarrow\mathfrak{A}\vee\neg\mathfrak{A}}$$

これは 1) に反する

7) $\mathfrak{A}(x)$ が論理記号を含まず,変数として x のみをもつとき, $\neg\forall x\mathfrak{A}(x)\rightarrow\exists x\neg\mathfrak{A}(x)$ は LJ で provable でない.

いま, この式が LJ で provable とし, この式に至る三段論法なしの証明図を P とする.

i) P の式の左辺には $\exists x\neg\mathfrak{A}(x)$ は含まれない. 故に,始式の右辺は $\exists x\neg\mathfrak{A}(x)$ ではない. 従って, 上式の右辺は $\exists x\neg\mathfrak{A}(x)$ でなく下式の右辺が $\exists x\neg\mathfrak{A}(x)$ であるような推論図 I_1 がある. I_1 は増右か ∃ 右である.

ii) I_1 が ∃ 右で上式の右辺が $\neg\mathfrak{A}(a)$ とすると, i) と同様の論拠により, 上式の右辺は $\neg\mathfrak{A}(a)$ でなく下式の右辺が $\neg\mathfrak{A}(a)$ であるような推論図 I_2 がある. I_2 は増右か $\neg$ 右である.

iii) I_2 が $\neg$右とすると, I_2 の上式の左辺には $\mathfrak{A}(a)$ が含まれ右辺は空である. 始式が $\mathfrak{A}(a)\rightarrow\mathfrak{A}(a)$ であるか, または, 上式の左辺に $\mathfrak{A}(a)$ を含まずに下式の左辺に $\mathfrak{A}(a)$ を含むような推論図 I_3 がある. I_3 は増左である.

iv) 始式が $\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a)$ とすると，下式の右辺は $\mathfrak{A}(a)$ でなく上式の右辺が $\mathfrak{A}(a)$ であるような推論図 I_4 がある．I_4 は $\forall$ 右でなければならないが，また I_2 より上になければならない．従って I_4 の下式の左辺には $\mathfrak{A}(a)$ が含まれ，a は eigenvariable の条件を満たさないので不合理．

v) I_1, I_2, I_3 のいずれかが増のときは，容易にわかるように $\neg\forall x\mathfrak{A}(x)\to$ が provable となり不合理．

第2章 §4) (p. 101)

1) $\tilde{\Gamma}_0\to\forall x(\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))\vdash\mathfrak{A}(x))$.

$\mathfrak{A}(1)\wedge\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1))$ を $\mathfrak{B}$，$\mathrm{Min}\,(z)\neg\mathfrak{A}(z)$ を m とする．

(1) $\tilde{\Gamma}_0,\ \mathfrak{A}(m)\to\mathfrak{A}(a)$ を証明する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}(m)\to\mathfrak{A}(m)}{\neg\mathfrak{A}(m),\mathfrak{A}(m)\to}}{\neg\mathfrak{A}(m)\wedge m\le a,\mathfrak{A}(m)\to}\qquad\dfrac{\mathfrak{A}(a)\to\mathfrak{A}(a)}{\to\mathfrak{A}(a),\neg\mathfrak{A}(a)}}{\neg\mathfrak{A}(a)\vdash\neg\mathfrak{A}(m)\wedge m\le a,\mathfrak{A}(m)\to\mathfrak{A}(a)}}{\tilde{\Gamma}_0,\ \mathfrak{A}(m)\to\mathfrak{A}(a)}$$

(2) $\tilde{\Gamma}_0\to m\le m-1,\ \mathfrak{A}(m-1)$ を証明する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{m\le m-1\to m\le m-1}{\neg\mathfrak{A}(m)\wedge m\le m-1\to m\le m-1}\qquad\dfrac{\mathfrak{A}(m-1)\to\mathfrak{A}(m-1)}{\to\mathfrak{A}(m-1),\neg\mathfrak{A}(m-1)}}{\neg\mathfrak{A}(m-1)\vdash\neg\mathfrak{A}(m)\wedge m\le m-1\to m\le m-1,\mathfrak{A}(m-1)}}{\tilde{\Gamma}_0\to m\le m-1,\mathfrak{A}(m-1)}$$

(3) $\tilde{\Gamma}_0,\ m=(m-1)+1,\ m\le m-1\to$ を証明する

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{m\le m-1\to m\le m-1\qquad\dfrac{\tilde{\Gamma}_0,m=(m-1)+1,m-1<(m-1)+1\to m-1<m}{\tilde{\Gamma}_0,m=(m-1)+1\to m-1<m}}{\tilde{\Gamma}_0,m\le m-1,m=(m-1)+1\to m\le m-1\wedge m-1<m}}{\neg(m\le m-1\wedge m-1<m),\tilde{\Gamma}_0,m\le m-1,m=(m-1)+1\to}}{\tilde{\Gamma}_0,m=(m-1)+1,m\le m-1\to}$$

(4) $\tilde{\Gamma}_0,\ \mathfrak{B},\ m=(m-1)+1\to\mathfrak{A}(m)$ を証明する．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\tilde{\Gamma}_0,m=(m-1)+1,\mathfrak{A}((m-1)+1)\to\mathfrak{A}(m)\qquad\dfrac{(2)\qquad\qquad(3)}{\tilde{\Gamma}_0,m=(m-1)+1\to\mathfrak{A}(m-1)}}{\tilde{\Gamma}_0,\mathfrak{A}(m-1)\vdash\mathfrak{A}((m-1)+1),m=(m-1)+1\to\mathfrak{A}(m)}}{\tilde{\Gamma}_0,\forall y(\mathfrak{A}(y)\vdash\mathfrak{A}(y+1)),m=(m-1)+1\to\mathfrak{A}(m)}}{\tilde{\Gamma}_0,\ \mathfrak{B},\ m=(m-1)+1\to\mathfrak{A}(m)}$$

(5) $\tilde{\Gamma}_0, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(m)$ を証明する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\tilde{\Gamma}_0, m=1, \mathfrak{A}(1) \to \mathfrak{A}(m)}{\tilde{\Gamma}_0, m=1, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(m)} \qquad \dfrac{\dfrac{(4) \qquad m>1 \to m>1}{\tilde{\Gamma}_0, \mathfrak{B}, m>1 \vdash m=(m-1)+1, m>1 \to \mathfrak{A}(m)}}{\tilde{\Gamma}_0, \mathfrak{B}, m>1 \to \mathfrak{A}(m)}}{\tilde{\Gamma}_0, m=1 \vee m>1, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(m)}}{\tilde{\Gamma}_0, \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(m)}$$

(6) $\tilde{\Gamma}_0 \to \forall x(\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}(x))$ を証明する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{(5) \qquad (1)}{\tilde{\Gamma}_0, \ \mathfrak{B} \to \mathfrak{A}(a)}}{\tilde{\Gamma}_0 \to \mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}(a)}}{\tilde{\Gamma}_0 \to \forall x\,(\mathfrak{B} \vdash \mathfrak{A}(x))}$$

即ち $\tilde{\Gamma}_0 \to \forall x\,(\mathfrak{A}(1) \wedge \forall y\,(\mathfrak{A}(y) \vdash \mathfrak{A}(y+1)) \vdash \mathfrak{A}(x))$

2)

i) $\tilde{\Gamma}_0, \ \mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\,\mathfrak{A}(z)) \to \exists x \mathfrak{A}(x)$ を証明する.

$$\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z)) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z))}{\mathfrak{A}(\mathrm{Min}\,(z)\mathfrak{A}(z)) \to \exists x \mathfrak{A}(x)}}{\tilde{\Gamma}_0, \ \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z)) \to \exists x \mathfrak{A}(x)}$$

ii) $\tilde{\Gamma}_0, \ \exists x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))$ を証明する.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z)) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))}{\mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z) \leq a \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))} \qquad \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(a)}{\mathfrak{A}(a) \vdash \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z) \leq a, \ \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))}}{\forall x[\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z) \leq x], \ \mathfrak{A}(a) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z))}}{\forall x[\mathfrak{A}(x) \vdash \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z)) \wedge \mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z) \leq x], \ \exists x \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\,\mathfrak{A}(z))}}{\tilde{\Gamma}_0, \exists x\, \mathfrak{A}(x) \to \mathfrak{A}(\mathrm{Min}(z)\mathfrak{A}(z))}$$

あ と が き

以上において，基礎論における古典

G. Gentzen : Untersuchungen über das logische Schliessen. I, II, Math. Z. 39 (1935), 176～210, 405～431.

における LK の基本定理および

G. Gentzen : Die gegenwärtige Lage in der mathematischen Grundlagenforschung. Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. Leipzig, 1938.

による自然数論の無矛盾性の証明を中心として述べた.

自然数論の無矛盾性は，同じく Gentzen の

Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie, Math. Ann. 112 (1936), 493～565.

によって初めてなされたのである.

数学基礎論へのよき入門は，以上の Gentzen の古典の理解にあると信ずるからである.

本講座を読んだ後には，読者はできれば以上の Gentzen の論文をもう一度がん味されて，それからは直接いろいろな論文を読まれるのがよいと思う.

また，有限の立場ないし数学基礎論についての邦書の解説としては

赤　摂也，基礎論　新初等数学講座（小山書店）

のほかに，次の書物に散見される.

吉田洋一・赤　摂也，数学序説（培風館）

河田敬義・竹内外史，自然数論（河出書房）

第3章に関係ある古典的な文献は次のものである。§1. のためには

K. Gödel : Zur intuitionistischer Arithmetik und Zahlentheorie, Ergebmisse eines math Koll., Heft 4 (1933), pp. 34—38.

またはその英訳

On intuitisnitic arithmetic and number theory. The Undecidabe (M. Davis 編), Raven Press 刊, pp. 75—81.

§2. §3. および §4. には,

K. Gödel, Über eine bischer noch nicht benützte Erweiterung des finiten Standpunktes, Dialectica. 12 (1958), pp. 76—82.

§5. と §6. は種々な論文からの引用であるが, 特に古典的なものは, §6. の 4) と 5) に関する

G. Gentzen : Beweisbarkeit und UnbeWeisbarkeit von Anfangsfällen der transfiniter Induktion in der reiner Zahlentheorie, Math. Ann. 119 (1943) pp. 140—161.

がある。なお Gentzer の全論文の英訳が出た：

The collected papers of Gerhard Gentzen (M. E. Szabo 編), North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

付　　録

哲学と数学基礎論

私は学生のときから数学基礎論が好きだった．好きだったというより魅せられたといった方が本当かも知れない．それ以後その他の数学の分野にも関心をもって居りまたいろいろの計画をもっているが，まあ大体数学基礎論をずっとやってきたといってよく，ある意味では長い年月によって一層愛着が深まったといえるが，若い時に夢中だったというのは今深い愛着をもつというのとは何か異なった特別の現象であったように思う．好きなことをやっているのは誠に結構なのであるが，唯困るのは数学の他の分野の人が，私が哲学のようなものをやっていると思うことであった．これが“哲学のような深い立派なものをやっている”と思うのなら一向に差支えないが，“哲学のようなツマラナイコトをやっている”と大体思うようで困った．親切な何人かの人はそんなつまらないことをやらないようにとか，そんなことは老後にやるものだとか，心から忠告してくれた．

これは私には大変心外であった．私にしてみれば，私のやっていることは“その他に特別な意味があるか？”ということは別にしても少なくとも普通の数学の人がやっているものと同じ数学的な面白さ，数学的な意味をもっているものだった．この数学の内部での雰囲気が若い時の私を“哲学的”といわれることに強い反感をもたせまたひいては強い“哲学嫌い”にしてしまった．

気がついてみるといつのまにか，私にはこういう類いの reaction がなくなってしまった．近年のことでも，“数学の人は紙とエンピツだけでできるからよいですね”といわれた数学の人が私の方をふりむいて“竹内さんの方はその紙とエンピツもいらないのですよね”といわれたり，今年も若いインド人の数学者から“logic！ 一体本当に面白くてそんなものをやっているのか？”（この訳

は誤訳である．彼の言葉には強い調子はなく本当に不思議で仕方がなくて尋ねているという風であった.）などいわれても，そういう他愛ない考えを寧ろ無邪気に近い類いと思うようになった．原因はいろいろあるが，アメリカで logic が段々人気がでてきてそういう目でみられることが少なくなったこと，それに logic のなかでも私自身が特に哲学的であることを自分で認識するようになったことなどが主な原因であろう．

とはいうものの私の哲学に対する偏見が全くなくなったのではない．ある種のものは以前と同じ程度にガンキョウに残っている．これを説明すると次のようになる．私にとって哲学とは思想の中心でありしたがって行動の原理である．哲学のための哲学というのは私には理解できないのである．こういうと大分誤解される可能性がある．誤解を避けるためにもう少し説明することにする．数学や自然科学をとわず今大きなプログラムを遂行しようとする．それには哲学が必要である．必要であるといったのは間違いで，哲学があって初めて大きなプログラムができたというのが本当であろう．このプログラムを遂行して行くためにはこの哲学について考え，説明し，ディスカッションすることが必要である．またさらに一つの大きなプログラムが仕上ったとする．この仕事を説明するには，その原理となった哲学を説明し，議論することが必要である．例えばヒルベルトの無矛盾性のプログラムのために形式主義と有限の立場の哲学はそれなくしては，その数学を無意味にしてしまうものといってよく，またアインシュタインの相対性理論の哲学もそのよい例といってよいであろう．しかしこのような行動の原理とならないような哲学というものは一体どんなものであろうか？　毎日哲学について議論しているというのは一体どんなものなのであろうか？　私には想像がつかないのである．少なくとも現在の所哲学者は数学・自然科学に興味をもっているようであるが，数学・自然科学の側からはあまり強い結びつきを感じないように思う．このことは上にのべた私の疑問の間接的な証明であるように思われてならない．毎日哲学を考え議論し教えている人というのは，出版予定で，“秘めたる内心の記録”という日記をセッセとかいている作家のような感じで私にはとてもできない芸当だと思うのであ

る．こう露骨にかいてみると，やはり私が本当に思っていることとは大分ハズレたようである．本当の所は，哲学ときくと上のような傾向がカナリ強いのではないかと思って警戒したくなるといった所である．

さて哲学についての私の個人的な態度の説明に大分紙数を費してしまったが，このような気持で，本誌から依頼された“数学について”を書くとしたらどんなことをかくべきであろうか？　本来ならば，ヒルベルト，ゲンツェンの有限の立場に立ってのヒルベルトの（無矛盾性についての）プログラムについてかくのが，私が今までやってきたものからいって一番ふさわしいように思う．しかしながらこれは一寸困るふしがある．ヒルベルトのプログラムについてはいろいろな個所でいろいろ説明されて居り，今さらそれに付加える必要はないように思われる．ヒルベルト，ゲンツェンの有限の立場については，ヒルベルトの初期のものについてはヒルベルト，ベルナイズの本によい解説があるし，私の共立出版からの“数学基礎論”をよんで頂いてもよいと思う．ゲンツェンの発展させた部分は残念ながらゲンツェン自身はあまりよい解説をしていない．われわれはゲンツェンの数学的な論文からその哲学的な内容をくみとらねばならない．しかしながら私は最近証明論の本をかく機会があたえられて，ゲンツェンの発展させた部分についての詳細な解説をしたばかりであり，その初等的な解説をさらに“数学セミナー”で書いた所である．今さらにこれについてかくとすれば，以上のいずれかの繰返しになってしまう．さらにゲンツェンのあとに私自身が発展させた部分が多小あるが，現在の時点でこれについてかくとすれば，極度に技術的な数学的な説明と哲学的説明とは互いに入り乱れてなされなければならず，本誌に向かないばかりではなく，大体紙数からいってもとてもこの小文ではもちそうもない．ここでは単に標語として次の私の意見をあげておくだけにする．

有限の立場とは，具体的な図形のあたえられた列，または具体的な図形の列についての具体的な操作のあたえられた列，…　についての思考実験を許す立場である．

さて有限の立場を割愛するとすれば，次には一体どのようなことについての

べるのが本当であろうか？　正直にいうと実はとりあげてここでのべるようなものは一つもなく，いずれもやや漠然と考えているものであり，時間と共に熟するのを待っている状態である．ここではそれを少しでも形をつけるよい機会と思ってとりあげてみることにする．最初のものも，後のものも深い所では，証明論と集合論と双方に結びついているものといってよいであろう．

I．数学的存在について

数学は抽象的な実在しないものについての学問である，それが物理学と数学との一番の差である，というようなことがよくいわれる．こういうことをきくとつい反問したくなる．いっていることの意味がよく分らないからである．結局実在ということの意味と抽象的ということの意味を尋ねるということになってしまう．議論をして行くと大低触覚・視覚・聴覚・嗅覚・味覚というような問題になってしまう．この辺りで一寸冗談をいいたくなって，大低は，“量子力学によれば，あなたの思っているより，物質の実在というのはズットふたしかなもののようですよ”とか“数学者は高級な人類で特別な第六感をもっていて，その第六感によって数学的存在をマザマザと知覚するのです”などといったりする．

さて冗談に逃げ込まないで，もう少し正確に表現すると次のようになる．

私にとっては，視覚・聴覚・触覚のように現在極めてハッキリとわれわれがこれがしかと実在であると感じさせる五官の働きも，実は赤ん坊の時から長い間極めて沢山の経験をとおして総合体得されたものであり，本質的にはその実在性および抽象的性格は数学的存在の場合と変りがないように思われる．この外界に対してのわれわれの強い実在の確信は，ほとんどすべてのわれわれが問題にならない圧倒的に多くの量の経験をすることによって得られる確信，と同時にまた他人も自分と同じ（あるいは本質的に同じ）経験をもっていると思う確信に外ならない．これに反して数学的存在に対するわれわれの経験は圧倒的に少ないし，また他人とその概念を共有しているという確信が極めて少ないのである．しかし，盲で眼が見えない人がいるということが，われわれの視覚的世界の存在を否定しないように，数学的存在と無縁な人がいるということが，

数学的存在を否定することにはならないのである．もちろん外界に対する圧倒的多くの経験を，圧倒的に多くの人が数学的存在にするということは事実として不可能であるから，現実においてわれわれの外界の実在の意識と，われわれの数学的存在の意識との間には極めて大きな差があることは事実であるが，また逆に私が 0, 1, 2, … が実在であるとか，空集合（ϕ）や，空集合だけからなる集合…が実在であるといったとき，もちろん言葉の使い方に対する批判はあっても，それほど誇張しているとは思わないのである．

変な例をあげることは，かえって本論を乱してしまう恐れがあるが，今私が窓から外をみて遠くに美しい紅葉を眺める．私はその傍まで行ってみた訳ではないが，私は幻影でないその紅葉の実存を信ずる．このような存在と数学的存在とはかなり似かよっている．もっとサイアンス・フィクションなみの例をあげるならば，若しわれわれが視覚や触覚を失って，なお自分の運動の意識だけは残っているとする．その時，われわれは外界の物理的な実在はある種の運動の不可能性によって認識するであろう．このような存在は，もともと概念的，抽象的であって，いろいろの information の総合である．この種の存在は全く数学的存在と類似である．しかしわれわれの外界の存在も圧倒的な量の差とその普遍性の差を除いては本質的には同じものであろう．

この数学的存在についての考察は，われわれがどうやって新しい公理を見出すか？という疑問に対して積極的な解答をあたえる．普通われわれは，いわゆる集合論の公理系のなかで現代数学を展開する．第一の疑問はその集合論の公理系は一体，単なるゲームのルールなのか？それとも，確定的な数学的存在についてのわれわれの仮説であるのか？という疑問である．私の意見は，物理学が外界に対してのわれわれの仮説であると同様に，集合論の公理はわれわれの(ある種の)数学的存在に対する仮説なのであるということである．物理学で仮説を立て，実験し，推論するように，われわれも仮説を立て，数学的存在について調べ，確めるのである．眼で見，手で触わるかわりに，心で見，心でさわるのである．

さて，現在の集合論が，（ある種の）数学的存在についてのよい仮説である

ことを認めることとして，さらに次のような問題がその分野に働くものに現実的にやってくる．われわれはゲーデルの不完全性定理によってこの現在の集合論の体系が不完全であることを知っている．さらにコーエンの革命的発見以来多くの身近な問題が集合論から無矛盾で独立であることを知っている．これは明らかにわれわれがさらに新しい公理を発見して行くことが大切であることを意味している．しかしながらこのようなことは本当に可能であろうか？この疑問の強い迫力は数学にタズサワッテいる人でなければ仲々理解できない．疑問の意味は決して哲学的なものではなくて，もっと現場的感情によるものである．そんなことをいったってわれわれ現場に働いているものにとってはそんな旨いことができっこないことは明瞭ではないか？という感情である．もちろんここで説明を要する．単に現在の集合論を拡張するだけならかなり説得力のある新しい公理を提出することは可能である．しかしわれわれの身近な興味のあるような命題，例えば連続体仮説を決定するような，将来において数学者の大部分を説得するような，新しい公理が発見されるような可能性が果してあるか？ということである．

もう少し説明すると，現在集合論に従事している人は集合についてかなりよく知っており，身近になっていると信じている．その人達が現在その兆候も感じないものを未来において突然認識するということが，一体どんな根拠で可能と考えられるか？という疑問なのである．なるほどいろいろな仮説を提出することはできるだろう．そして数学的存在をわれわれが認めるとしても，ゲームのルール以上に確信をもてる新しい公理を見出してわれわれの身近な興味のある問題を解くことが果して可能であろうか？　自分には信じられない．この悲観的意見はあまりハッキリ表明されたことはないが，事実としては極端に強いのである．（一般数学者だけのなかでという意味ではなくて，集合論専門家で数学的存在を認める人達のなかでもという意味である．）

私の意見はここにおいても肯定的である．上の状態は問題の難しさを物語っている．それ以上にハッキリいえば，上の状態はわれわれの集合的存在について考え，模索し，観察した年月の浅さ，経験の少なさを物語っており，若しわ

れわれがその方面の研究を続けて行き，集合論的存在についての経験を十分に得るならば，いつかは可能なことと信じている．少なくとも現在の集合論の公理と同じ程度に説得力のある新しい公理の発見は可能だと信じている．

II．mind の self-reflection について

ここに英語を用いたのは，私が英語が得意だからではない．（私が英語が極めて苦手であることは，私を知っている人には困るほど明白な事実である）．何か今までにない新しい概念を提起して考えようとする時，外国語の術語としての使用は極めて便利で効果的だと思うからである．

まず，問題にすることがらを説明するために，今まで私としては何度も別な所で行なった初等的な解説から始めることにしよう．

普通，現代の数学は infinite mind を想定して，その infiite mind ならばどうするであろうか？という予想をすることによって成立するといってよいであろう．infinite mind というのは，無限のものについて全部しらみつぶしにしらべてみることができる mind のことをいっているのである．例えば

$$\forall x(A(x) \vee \neg A(x))$$

というのは infinite mind にとっては一つ一つの x について全部 $A(x)$ か $\neg A(x)$ かを調べてみればよいから成立するのである．同様にして

$$\{x|A(x)\}$$

はすべての x について（ここに x がうごく範囲は確定しているものとする）一つ一つ $A(x)$ が正しいかどうかを調べて正しいものだけを残して残ったものだけの集合を考えればよい訳である．これに反して人間の mind は明らかに finite mind である．若しわれわれが finite mind に徹するならば以前にのべた有限の立場の数学を構成することになる訳である．

もっとハッキリいえば，現代数学さらにキチンと表現すれば現代集合論は infinite mind についてのわれわれの仮説または予想というべきものである．集合論の場合にもっと詳しく説明すると，infinite mind を想定して，それが空集合から出発してドンドン集合を構成して行くことを想定してそのでき上った集合全体の世界がどうなっているかについてのわれわれの仮説が集合論の公

理なのである．したがって次のような問題が数学基礎論で極めて大切な問題となってくる．

1)　infinite mind の働きを完全に formulate する．ここに完全にというのを文字通りにとると不可能になるのでもう少し弱くいいかえると，infinite mind の働きをよりよく formulate する，これは，実はもう少しいいかえると集合論の新しい公理を見出すということである．

2)　finite mind の世界の中でわれわれの infinite mind の世界の justification をする．これはわれわれの mind の世界が finite であって現代数学の世界がわれわれの infinite mind についての単なる予想に過ぎないからわれわれとしてはぜひともその合理性を確認したい訳である．このためにはわれわれは finite mind の世界の数学を十分発展させなければならない．すなわちわれわれは finite mind 自身に関する研究自身が大切なのである．これをさらに一歩すすめると，次のような問題も必然的に姿を現わしてくる．

3)　finite mind の働きを完全に formulate する．これは完全にという形容詞をつけたときできるかどうかは分らないが，若しわれわれが非常に強い infinite mind の世界を無条件に認めるならば，その中ではあるいは可能かも知れない．もし可能でなければ，前と同じようによりよくとあらためる訳である．

さてこう考えてみると，数学基礎論において，finite，infinite をとわず mind の働きを formulate するというかなり共通した問題が大切であるということが分ってくる．

さて，このことを真剣に考えてみると，何より難しいのが mind の self-reflection である．このことについて少し説明しよう．今例えば finite mind を考えることにしよう．若し finite mind の機能が完全に finite であれば，われわれの数学は finite を出ない訳である．しかしながらわれわれの finite mind はいわゆる potentially infinite なのである．すなわち $0, 1, 2, 3, \cdots$ と実は無限のものを暗に指示して行くことができるのである．（これがいかに大切かは有限の立場で物を考えようという人にはイヤというほど分っていることであ

る.）これはなぜであろうか？ それは mind に self-reflection すなわち自分が何をやっているか？を考察する力，または自分が何をやっているかを知っている能力があるからである．infinite mind の時もそうである．infinite mind が集合を空集合から集合を作って行くとき，私などは授業や解説ではなるべくサラリとカンタンに順序数の構成をさも当然のようにすませてしまうが，よく考えてみれば，そこに明かにinfinite mind の self-reflection が働いているのである．特にある一定の closed な集合にとじこめられないで先へ先へと行くということには自分の内部だけで構成して行くmindにとってはself-reflection の働きがなににもまして大切なのである．この mind の self-reflection の働きを formulate するにはどうしたらよいか？ これはある意味で現在私が考えつつある重要な問題の一つである．この問題は強い体係の無矛盾性の問題を有限の立場で考えることが現実に可能であるという立場自身の積極的な基盤として常に暗々裡に考えねばならなかった問題である．それにまた infinite mind については私が前に formalization principle という論文を考えたとき，また集合論の基本的問題を考える時に，常に陰に陽に現われてくる問題である．今までは正面きって考えることを避けてきたが，段々と正面から取組まねばならないのではないか？ と思っている．

ここでいい忘れたが，ここにかいた mind の self-reflection というのは末綱先生が常にいわれた行為的直観と密接な関係があるように思う．しかしながら現在私には末綱先生のかかれたものが全部手許にある訳ではなく，またそれについて調べてその両者の関係について言及することができないので，ここでは単にそのことだけを記して将来への宿題にしておきたい．

この問題に関連して，infinite mind についての新しい仮説，すなわち集合論の新しい公理を得る一つのプログラムについて言及しておきたい．finite mind や infinite mind の外に中間的な ω-mind やconstructible mindを考えるとどうなるであろうか？ 若し infinite mind の代りにずっと弱い ω-mind が集合を構成して行くと一体どこまで集合が構成できるであろうか？ この問題は次の意味で大変興味深い．

1)　self-reflection の働きをとらえるのに大変考え易いかも知れない.

2)　したがって, この mind の限界を明らかに明示することが可能であろう.

3)　1) の仕事をした上では, この弱い infinite mind の構成する世界は集合論的に明白ないくつかの構成の一つになるであろう. したがってここでわれわれはハッキリとした仮説があたえられる. すなわち例えば, ω-mind の self-reflection は……であり, その限界は……であり, 構成は……である. ここにその可能性は恐らく有限個の可能性のイズレカであるという風にハッキリ表現されるであろう. そうすれば, そのドレカと態度をきめることはかなりの期間その問題について考察することによって可能であろう. このことは恐らく集合論の新しい公理となるだろう. もう少し説明するならば, 例えば連続体仮説が正しいか, 誤りかドチラかにきめろといわれるとわれわれはほとんどどう判断すべきかその基盤がなくて迷うだけである. しかしながら ω-mind の世界について十分研究した上で, イクツカの可能性のどれであるか? といわれるならば, われわれには ω-mind についてのよい直観をもつ可能性が多い (少なくとも infinite mind についてはわれわれは今まで素晴しい成功を収めている). したがって新しい公理を得ることがタヤスイのではないか? ということである. この ω-mind についてはあまり遠くない将来に発言できる機会もあるのではないか? と思っている. いずれにしても mind の self-reflection というのは数学基礎論のなかで極度に重要で興味のある問題ではないかと思っている.

エピローグ

何かまだかく時機にきていないものを強引にかいてしまったような気がする. それと同時になんだか哲学者のようなことをしたみたいで恥しい気がする.

これらのことは私にとっては行動の原理であるが, 逆に, これらのことについてさらに深く考えるということは, 行動 (すなわち数学的活動) を通してのみ可能であると私は思う。私にとってはこれらのことについていわゆる哲学として思索することはあまり意味がないように思われる. 技術的な数学者が技術

的な数学としてとりあげ，問題にし，考えられる形にして提出して行くことができるのでなければ満足の行くこの問題に対する考察であるとはいえないと思う．これはまあ正直な気持であるが，また同時に自分自身の恥かしさに対する言訳でもあるようである．

（科学基礎論研究 39 号，1972. Vol. 10, No. 4 より転載）

索　　引

ス，セ，ソ

タ

チ

テ

ナ，ハ，

ヒ，フ

ホ

ミ，ム

ユ，ヨ

ラ，ロ

数 学 基 礎 論
増補版
現代数学講座 1
定価 1100 円

検 印 廃 止

© 1974

昭和 31 年 10 月 25 日　初版 1 刷発行
昭和 45 年 2 月 20 日　初版 5 刷発行
昭和 49 年 3 月 5 日　増補 1 刷発行

著 者　竹 内 外 史
　　　　八 杉 満 利 子
発行者　南 條 正 男
東京都文京区小日向 4 丁目 6 番 19 号
印刷者　大 久 保 健 児
東京都新宿区市ケ谷本村町 27 番地

発行所　東京都文京区小日向 4 丁目 6—19
電話東京 (947) 2 5 1 1 (代表)
振替口座 東京 5 7 0 3 5 番
共立出版株式会社

印刷・新日本印刷　製本・菊地製本　Printed in Japan

社団法人
自然科学書協会
会 員

3341-145020-1371

現代数学の系譜 全19冊

■正田建次郎・吉田洋一監修

■第1期 全10冊＝好評刊行中 （第2期 全9冊＝続刊）

最近、数学がとみに時代の脚光を浴びるようになった。現代社会における数学の役割がいちじるしく拡大されてきたのである。しかしながら、現代数学の開花はもとより一朝にして成ったものではない。幾多のすぐれた先人たちが培ってくれた伝統によって、育てられたものであることはいうまでもないであろう。この〝現代数学の系譜＝全19冊〟はそうした先人たちの業績の跡をたずね、もって、この輝かしい伝統を明らかにすることを目標として企画された。本講座はこの目標を達成するために、まず、数学発展の途上、特に時期を画したとみられる著書・論文を精選し、これを忠実に翻訳するとともに、門外の人にも理解しやすいよう、これに親切な注釈を施し各著書・論文がその時代時代の数学的背景の前で演じた役割と、その現代数学の上に及ぼした影響とについて周密な解説を加えるという方針を採った。

1 コーシー微分積分学要論……小堀 憲訳 解説／A5・二四八頁・一五〇〇円

2 ペアノ数の概念について……小野勝次・梅沢敏郎訳 解説／A5・一九六頁・一二〇〇円

3 ルベーグ積分・長さおよび面積……吉田耕作・松原 稔訳 解説／A5・一八四頁・一二〇〇円

4 ヒルベルト数学の問題……一松 信訳 解説／A5・一五〇頁・九五〇円

5 ディリクレ、デデキント整数論講義……酒井孝一訳 解説／A5・七〇〇頁・六〇〇〇円

6 ポアンカレ常微分方程式……福原満洲雄・浦 太郎訳 解説／A5・四三八頁・二八〇〇円

7 ヒルベルト幾何学の基礎 クラインエルランゲン・プログラム……寺阪英孝・大西正男訳 解説／A5・四三二頁・二八〇〇円

8 カントール超限集合論……功力金二郎訳 解説／続刊

9 バーンサイド有限群論……伊藤 昇・吉岡昭子訳 解説／A5・六〇〇頁・三六〇〇円

10 リーマン、リッチ、レビ＝チビタ アインシュタイン、マイヤーリーマン幾何とその応用……矢野健太郎訳 解説／A5・二四八頁・一六〇〇円

共立出版株式会社